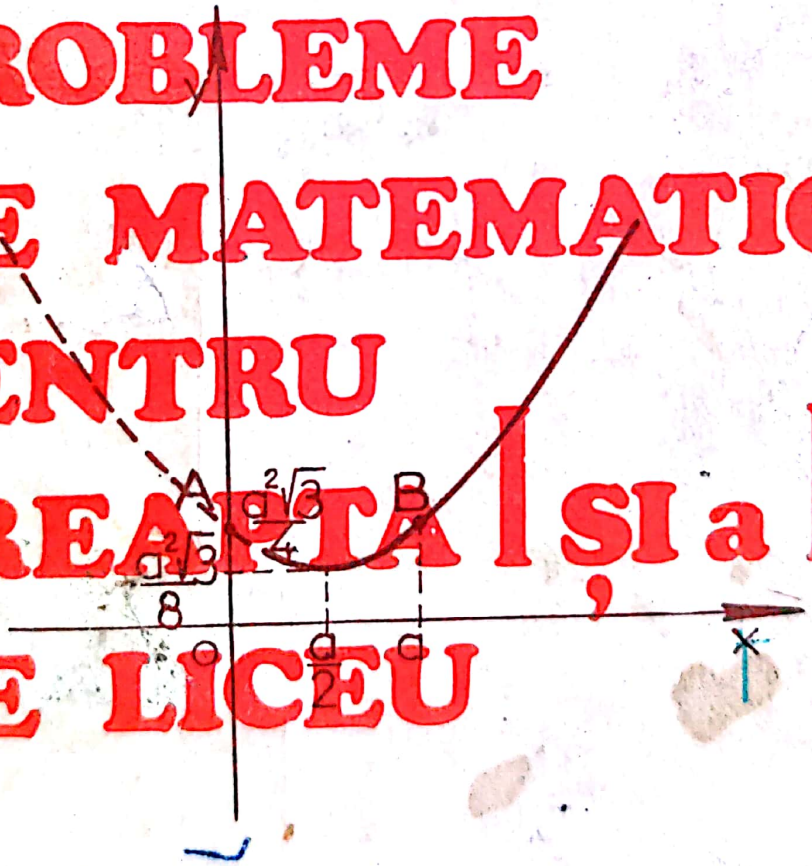
SINTEZE LYCEUM

GHEORGHE CĂLUGĂRIȚA
VALERIU MANGU

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU TREAPTA I ȘI a II-a DE LICEU



★★

EDITURA ALBATROS

Scanned with OKEN Scanner

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

VII.1.0. Matrice, operații cu matrice.

Matricele sînt reprezentate prin tabele ale căror elemente sînt dispuse pe linii și coloane. Elementele sînt însemnate prin doi indici; primul arată *linia* din care face parte elementul iar al doilea indice arată *coloana*.

O matrice A se scrie prescurtat $A = \| a_{ij} \|$ cu $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$, dacă a_{ij}, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, m}$ sînt elementele sale[1].

Dacă $n = m$, matricea este *pătratică*; în caz contrar matricea este *dreptunghiulară*.

Matricea cu toate elementele egale cu zero se numește matricea *zero* și se notează prin 0.

Matricea pătratică în care elementele diagonalei principale sînt egale cu 1 iar toate celelalte elemente sînt egale cu zero, se numește matricea *unitate* și se notează prin U (sau I, sau E).

Matricea 0 joacă rol de element neutru pentru adunarea matricelor.

Matricea U este element neutru pentru înmulțirea matricelor.

VII.1.1. Matricele $A = \| a_{ij} \|$ și $B = \| b_{ij} \|$, $i = 1, 2 \ldots n$; $j = 1, 2, \ldots m$ au ca sumă matricea $C = \| c_{ij} \|$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$ cu:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i \in \overline{1, n}, \quad j \in \overline{1, m}.$$

[1] În afară de cazurile în care se specifică altfel, se vor considera numai matrice cu elemente numere reale.

Scanned with OKEN Scanner

Matricea $A = \|a_{ij}\|$ admite ca *opusă* matricea:

$$-A = \|-a_{ij}\| \text{ și } A + (-A) = 0.$$

Nu se pot aduna decît matrice care au același număr de linii și respectiv același număr de coloane.

Însemnînd prin $A_{n,m}$ o matrice cu n linii și m coloane, suma:

$$A_{n,m} + B_{n,m} = C_{n,m}$$

are sens. Suma $A_{n,m} + B_{p,q}$ nu are sens pentru cazul în care $(m, n) \neq (q, p)$.

Mulțimea matricelor $M_{n,m}$ poate fi înzestrată cu operația de adunare și această operație determină o structură de grup abelian.

VII.1.2. Matricele $A_{n,m}$ și $B_{m,p}$ se pot înmulți după regula linie—coloană—linie și se obține o matrice $C_{n,p}$.

De exemplu, dacă:

$$A_{3,4} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} \quad B_{4,2} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

atunci:

$$C_{3,2} = \begin{Vmatrix} 10 & 0 \\ -7 & 4 \\ 3 & -4 \end{Vmatrix};$$

deoarece:

$$A \cdot B =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1\cdot 0+0\cdot(-1)+3\cdot 3+1\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 2+3\cdot 0+1\cdot(-1) \\ 2\cdot 0+1(-1)+(-2)\cdot 3+0\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 2+(-2)\cdot 0+0\cdot(-1) \\ 0\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 3+2\cdot 1 & 0\cdot 1+(-1)\cdot 2+0\cdot 0+2\cdot(-1) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 10 & 0 \\ -7 & 4 \\ 3 & -4 \end{Vmatrix} = C_{3,2}.$$

Produsul matriceal nu este, în general, comutativ.

Pe mulțimea matricelor pătratice $M_{n,n}$ se pot defini operațiile de adunare și de înmulțire matriceală. Cele două operații (în ordinea adunare, înmulțire) determină pe această mulțime o structură de inel cu element neutru.

VII.1.3. *Definiție.* O matrice pătratică A se numește *inversabilă* dacă există matricea pătratică A^{-1} astfel ca $AA^{-1} = A^{-1}A = U$.

A^{-1} se numește *matricea inversă* a matricei A. O matrice (pătratică) A care nu admite matrice inversă se numește matrice *singulară* sau matrice *degenerată;* matricea se numește *nesingulară* dacă este inversabilă deci dacă $\det A \neq 0$ (det A reprezentînd determinantul lui A — vezi VII.2.0).

Matricea inversă a matricei unitate este tot matricea unitate.

VII.1.4. Determinarea matricei inverse a unei matrice A se poate face încă folosind operația de înmulțire și apoi de identificare a elementelor (în afară de procedeul clasic).

Fie, de exemplu:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{Vmatrix}.$$

Atunci:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{Vmatrix} x_1 + y_1 - z_1 & x_2 + y_2 - z_2 & x_3 + y_3 - z_3 \\ 2x_1 - y_1 + z_1 & 2x_2 - y_2 + z_2 & 2x_3 - y_3 + z_3 \\ x_1 + z_1 & x_2 + z_2 & x_3 + z_3 \end{Vmatrix}$$

de unde:

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 - z_1 &= 1, & x_2 + y_2 - z_2 &= 0, \\ 2x_1 - y_1 + z_1 &= 0, & 2x_2 - y_2 + z_2 &= 1, \\ x_1 + z_1 &= 0, & x_2 + z_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 + y_3 - z_3 &= 0, \\ 2x_3 - y_3 + z_3 &= 0, \\ x_3 + z_3 &= 1. \end{aligned}$$

Rezolvînd cele trei sisteme se obține:

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ridicarea unei matrice la puterea $n (n \in N^*)$ se poate face direct sau prin inducție completă.

VII.1.4.1. Să arătăm că orice matrice $A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ verifică ecuația:

$$x^2 - (a + d)x + (ad - bc) \cdot U = 0.$$

În adevăr:

$$A^2 = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & cb + d^2 \end{Vmatrix};$$

$$-(a + d) \cdot A = -(a + d) \cdot \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -a^2 - ad & -ab - bd \\ -ac - dc & -ad - d^2 \end{Vmatrix};$$

$$(ad - bc) \cdot U = (ad - bc) \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{Vmatrix};$$

$$A^2 + [-(a + d) \cdot A] + (ad - bc) \cdot U =$$

$$= \begin{Vmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -a^2 - ad & -ab - bd \\ -ac - dc & -ad - d^2 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

și deci ecuația se verifică.

Observație. Nu are sens să se rezolve formal ecuația:

$$x = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

întrucît necunoscuta este o matrice.

VII.2.0. Determinanți.

Fiecărei matrice pătratică $A_{n,n}$ îi corespunde un *determinant* cu n^2 elemente căruia i se atașează un număr numit *valoarea determinantului*, elementele determinantului fiind elementele matricei.

VII.2.1. Printre proprietățile determinanților găsim:

1°). Schimbarea liniilor în coloane și a coloanelor în linii cu păstrarea parității numărului de ordine al liniei (coloanei) conduce la un nou determinant cu aceeași valoare ca și a determinantului inițial.

2°). Dacă una din liniile (coloanele) unui determinant este formată numai din numere egale cu zero, valoarea determinantului este egală cu zero.

3°). Dacă se schimbă două linii (coloane) succesive între ele se obține un nou determinant a cărui valoare este opusă valorii determinantului inițial.

4°). Un determinant cu două linii identice (sau proporționale) este nul.

5°). Înmulțind toate elementele unei linii (coloane) cu același număr k, determinantul se înmulțește cu numărul k. De aici posibilitatea de a da drept factor comun divizorul comun între elementele unei linii (coloane).

Observație. Un determinant se înmulțește cu un număr înmulțind *numai* elementele unei *singure linii* (coloane), la alegere. O matrice se înmulțește cu un număr, înmulțind *toate* elementele matricei.

6°). Dacă toate elementele liniei i a unui determinant de ordinul n pot fi puse sub forma:

$$a_{ij} = b_j + c_j, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

determinantul este egal cu suma a doi determinanți având toate liniile, cu excepția liniei i, identice cu li-

niile respective din determinantul considerat; linia i are într-unul din ei, ca elemente, pe b_j, iar în celălalt pe c_j.

De aici constatarea că orice determinant se poate scrie sub formă de sumă a doi determinanți prin înlocuirea elementelor unei linii (linia i) prin suma a doi termeni.

7°). Dacă una din linii (coloane) este o combinație liniară a celorlalte, determinantul este nul.

8°). Un determinant nu-și schimbă valoarea dacă se adaugă elementelor unei aceleași linii (coloane) elementele corespunzătoare din altă linie (coloană) înmulțite cu un același număr.

9°). Dacă toate elementele unui determinant situate de aceeași parte a diagonalei principale sînt nule, determinantul este egal cu produsul elementelor diagonalei principale.

VII.2.2. Prin *minorul* corespunzător unui element se înțelege determinantul care rezultă prin suprimarea liniei și coloanei din care face parte elementul considerat. Acești minori se numesc minori de ordinul $n-1$ atunci cînd determinantul este de ordinul n.

Minorul elementului a_{ih} înmulțit cu $(-1)^{i+h}$ se numește *complementul algebric* al acestui element.

Un determinant se poate dezvolta după elementele unei linii (coloane) ca fiind suma complementilor algebrici corespunzători elementelor liniei (coloanei) considerate.

Observație. Dacă elementele unei linii (coloane) sînt egale cu zero cu excepția unui singur element, determinantul se reduce la complementul algebric al acestuia.

Exemple

VII.2.2.1. Să se calculeze determinantul:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Soluție. Cum în linia a treia există un element egal zero, folosim proprietățile determinanților.

Elementele coloanei a patra, înmulțite cu $+2$ se adaugă la elementele coloanei 1. Aceleași elemente se adaugă la elementele coloanei a treia. Deci:

$$d = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 2 \\ -13 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+4}\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 40.$$

VII.2.2.2. Determinantul de ordinul al treilea se poate calcula prin *regula lui Sarrus* fără a mai face apel la determinanți de ordinul al doilea.

Fie:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

un determinant de ordinul al treilea. Elementele determinantului se scriu:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

(s-au transcris primele două coloane) deci:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

adică se adună produsele elementelor de pe diagonala principală și paralele cu ea, marcate prin liniile punctate și se scad produsele elementelor de pe a doua diagonală și diagonalele paralele cu aceasta (marcate prin linie continuă).

VII.2.2.3. Determinantul *Vandermonde*:

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \dots a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

unde $a_i \in R$, $(\forall)\, i \in \overline{1,\ n}$, este egal cu produsul tuturor diferențelor $a_i - a_j$ unde $1 \leqslant j < i \leqslant n$.

În adevăr:

1°). Pentru $n = 2$, $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$.

2°). Presupunem că propoziția a fost demonstrată pentru un determinant *Vandermonde* de ordinul $(n - 1)$. Determinantul d_n de ordinul n îl transformăm în felul următor:

din linia n scădem linia $(n - 1)$ înmulțită cu a_1; din linia $(n - 1)$ scădem linia $(n - 2)$ înmulțită tot cu a_1 etc. În sfîrșit, din linia a 2-a scădem prima linie înmulțită cu a_1 și obținem:

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

determinant care se reduce la unul de ordinul $(n-1)$ prin suprimarea liniei şi coloanei întîi. Se constată uşor că:

$$d_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ultimul factor fiind tot un determinant Vandermonde de ordinul $(n-1)$ egal prin ipoteză cu produsul diferenţelor $a_i - a_j$ pentru $2 \leqslant j < i \leqslant n-1$.

Deci:

$$d_n = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

VII.2.2.4. Matricea *asociată* (sau matricea *reciprocă)* a matricei A:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

este matricea:

$$A^* = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix},$$

matricea A^* fiind formată din complementii algebrici A_{ij} ai elementelor a_{ij} ale matricei A, complementul algebric al elementului a_{ij} fiind situat în noua matrice la intersecţia *liniei* j şi *coloanei* i.

Se poate scrie:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$$

unde $|A|$ este determinantul asociat matricei A ($|A| = \det A$).

Dacă:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{Vmatrix},$$

$\det A = |A| = 5 \neq 0$ deci A este inversabilă.

Se recomandă ca pentru calculul matricei A^* să se folosească matricea A^t:

$$A^t = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{Vmatrix}$$

numită *matricea transpusă* (obținută prin schimbarea liniei i cu coloana i).

Complementul algebric al primului element este

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -5$$

etc., deci:

$$A^* = \begin{Vmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -10 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{Vmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -10 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Se verifică ușor că:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \frac{1}{5} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = U.$$

VII.2.2.5. *Rangul unei matrice.*

Fie $A_{n,m}$ o matrice cu n linii și m coloane, $n < m$ ($m = n + p$, $p \in N^*$).

Cu elementele matricei se pot alcătui determinanți minori de ordinele n, $n-1$, $n-2, \ldots, 1$.

Dacă unul din determinanții de ordinul n (în număr de C_m^n) este nenul, se spune că matricea are *rangul n*.

Dacă toți determinanții de ordinul n sînt nuli, se cercetează determinanții de ordinul $(n-1)$. Dacă unul din ei este nenul, matricea are rangul $(n-1)$ și așa mai departe.

Deci rangul unei matrice este $r \leqslant n$ dacă matricea are un minor diferit de zero de ordin r și toți minorii de ordin $r+1$ sînt nuli.

În practică, se trece de la minorii de ordin inferior la minorii de ordin superior.

Presupunînd că s-a găsit un minor T de ordin K diferit de zero, se calculează numai minorii de ordinul $K+1$, care bordează minorul T; dacă toți sînt nuli, rangul matricei este K.

Un alt mod de a obține rangul unei matrice se bazează pe transformările elementare ale matricei A (cu elemente dintr-un corp Ω) aducînd matricea la forma *diagonală* (toate elementele matricei sînt zero cu excepția unor elemente situate pe diagonala principală, extrapolînd noțiunea de diagonală).

Fie:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Permutînd în această matrice coloana întîi cu a doua și apoi înmulțind prima linie cu numărul $\frac{1}{2}$, se ajunge la matricea:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Adăugînd la a treia coloană prima coloană dublată și apoi înmulțind corespunzător linia 1 și adăugînd

la celelalte linii, se urmăreşte să se obţină o matrice care să aibă zerouri pe coloana 1:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Acum se înmulţeşte linia a doua cu -1. Înmulţim coloana a doua cu -3 şi o adăugăm la coloana a treia. În mod analog, se ajunge la matricea:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

ceea ce arată că rang $A = 2$ (sînt numai două elemente egale cu 1 pe diagonală).

Observaţie. O matrice de felul matricei $A_{5,3}$ nu poate avea rangul mai mare decît 3.

Toţi determinanţii de ordinul trei care se pot alcătui sînt nuli (C_5^3 este numărul determinanţilor).

VII.3.0. Sisteme de ecuaţii (gradul I).

Fie sistemul:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{aligned}$$

Se notează:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1} & a_{s2} \ldots a_{sn} \end{Vmatrix} \text{ şi } \bar{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1} & a_{s2} \ldots a_{sn} & b_s \end{Vmatrix}.$$

Matricea A este alcătuită din coeficienții necunoscutelor iar $\bar{A}$ este matricea *extinsă*.

VII.3.0.1. *Teorema lui Kronecker—Capelli.* Un sistem de ecuații liniare este compatibil, atunci și numai atunci cînd rangul matricei extinse $\bar{A}$ este egal cu rangul matricei A (dacă det $\bar{A}$ este nul, rangurile matricelor A, $\bar{A}$ pot să nu fie aceleași).

VII.3.0.2. *Situații posibile în rezolvarea sistemelor liniare neomogene.* Fie un sistem liniar neomogen cu s ecuații și n necunoscute. Notînd cu r rangul matricei sistemului, pot avea loc următoarele situații:

I). $s = n$ a°). $r = s$; sistemul este compatibil unic determinat.

b°). $r < s$; apar: $s-r$ necunoscute secundare și $s-r$ ecuații secundare.

1°). Dacă toți cei $s-r$ determinați caracteristici sînt nuli, sistemul este compatibil și are o infinitate de soluții.

2°). Dacă unul (sau mai mulți) din determinanții caracteristici este (sînt) nenul(i), sistemul este incompatibil (deci imposibil).

II). $s < n$ a°). $r = s$; apar $n - s$ necunoscute secundare; sistemul este compatibil și are o infinitate de soluții.

b°). $r < s$; apar $s - r$ ecuații secundare și $n - r$ necunoscute secundare.

1°). Dacă toți determinanții caracteracteristici sînt nuli, sistemul este compatibil și are o infinitate de soluții.

2°). În caz contrar, sistemul este incompatibil.

III). $s > n$ a°). $r = n$; apar $s - r$ ecuații secundare și deci $s - r$ determinanți caracteristici. Dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli, sistemul este compatibil unic determinat.

b°). $r < n$; apar $s - r$ ecuații secundare și $n - r$ necunoscute secundare.

1°). Dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli, sistemul este compatibil cu o infinitate de soluții.

2°). În caz contrar, sistemul este imposibil.

VII.3.0.2.1. *Exemplu.* Fie sistemul:

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$
$$x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0.$$

Rangul matricei A este egal cu 2. Rangul matricei $\bar{A}$ este egal cu 3. Sistemul este deci incompatibil. Ecuațiile principale sînt:

$$5x_1 - x_2 = 7 - 2x_3 - x_4,$$
$$2x_1 + x_2 = 1 - 4x_3 + 2x_4.$$

Ecuația secundară este:

$$x_1 - 3x_2 = 6x_3 - 5x_4.$$

Necunoscutele principale sînt x_1 și x_2 iar necunoscutele secundare x_3, x_4.

Se observă, în plus, că:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

Elementar, din ecuațiile principale, se obține:

$$x_1 = \frac{1}{7}(8 - 6x_3 + x_4), \quad x_2 = -\frac{1}{7}(16x_3 - 12x_4 + 9),$$

expresii care însă nu satisfac ecuația secundară.

VII.3.0.3. *Exemplu.* Fie sistemul:

$$7x_1 + 3x_2 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 = -3$$
$$4x_1 + 9x_2 - 11 = 0.$$

Rangul matricei A este 2. Rangul matricei extinse $\bar{A}$ este tot 2.

Sistemul este compatibil și admite o soluție unică. Soluția este $x_1 = -\frac{5}{17}$, $x_2 = \frac{23}{17}$.

Rangul matricei extinse este 2 deoarece:

$$d_c = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & 23 \\ 17 & 23 \end{vmatrix} = 0.$$

VII.3.0.4. *Exemplu.* Sistemul:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 1$$
$$x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 3$$

este compatibil deoarece rangul matricei extinse fiind 2, este egal cu rangul matricei coeficienților (toți determinanții de ordinul trei sînt nuli).

Considerăm x_3 și x_5 necunoscute principale, iar ecuațiile întîi și a doua, drept ecuații principale:

$$-2x_3 + x_5 = 1 - x_1 - x_2 + x_4,$$
$$x_3 + 3x_5 = 1 - 3x_1 + x_2 - 4x_4.$$

Soluția este ($\alpha, \beta, \gamma \in R$):

$$\left(\alpha, \beta, \frac{-2 + 4\beta - 7\gamma}{7}, \gamma, \frac{3 - 7\alpha + \beta - 7\gamma}{7}\right).$$

VII.3.0.5. *Exemplu.* Fie sistemul:

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1$$
$$3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1.$$

Deşi numărul ecuaţiilor este egal cu numărul necunoscutelor, determinantul sistemului fiind nul, regula lui *Cramer* nu se poate aplica. Rangul matricei coeficienţilor este 3. Rangul matricei extinse este de asemenea 3.

Considerînd primele trei ecuaţii, iar x_1 necunoscuta secundară (sau *liberă*), se obţine:

$$x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x_1;\ x_3 = -\frac{8}{5} + \frac{9}{5}x_1,\ x_4 = 0.$$

VII.3.0.6. *Sisteme liniare omogene.* Sînt sistemele de forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0.$$

Acest sistem este totdeauna compatibil avînd soluţia $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$ (numită soluţia *banală*).

Situaţii posibile:

a°). numărul ecuaţiilor este egal cu numărul necunoscutelor. Dacă r (rangul matricei A) este egal cu n, sistemul admite numai soluţia banală. Dacă $r < n$ sistemul are şi alte soluţii decît cea banală. Aceasta înseamnă că $\det A = 0$.

b°). Numărul ecuaţiilor este mai mare decît numărul necunoscutelor.

c°). Numărul ecuaţiilor este mai mic decît numărul necunoscutelor.

VII.3.0.7. *Exemplu.* Fie sistemul:

$$3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0$$
$$2x_1 + 6x_2 - 10x_3 + 18x_4 - 2x_5 = 0.$$

Rangul matricei coeficienților este 2, numărul necunoscutelor este 5.

Considerăm x_3, x_4, x_5 ca necunoscute *libere* (secundare).

Soluția generală este:

$$x_1 = \frac{19}{8} x_3 + \frac{3}{8} x_4 - \frac{1}{2} x_5,$$

$$x_2 = \frac{7}{8} x_3 - \frac{25}{8} x_4 + \frac{1}{2} x_5.$$

PROBLEME REZOLVATE

VII.R.1. Să se calculeze:

$$A_n = \begin{Vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{Vmatrix}^n.$$

Soluție. Să calculăm:

$$A_2 = \begin{Vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos^2 u - \sin^2 u & -\sin u \cos u - \sin u \cos u \\ \sin u \cos u + \sin u \cos u & -\sin^2 u + \cos^2 u \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos 2u & -\sin 2u \\ \sin 2u & \cos 2u \end{Vmatrix}.$$

În continuare, raționăm prin inducție completă. Presupunem că:

$$A_{n-1} = \begin{Vmatrix} \cos(n-1)u & -\sin(n-1)u \\ \sin(n-1)u & \cos(n-1)u \end{Vmatrix}$$

și calculăm:

$$A_n = A_{n-1} \cdot A_1 = \begin{Vmatrix} \cos(n-1)u & -\sin(n-1)u \\ \sin(n-1)u & \cos(n-1)u \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos(n-1)u\cos u - \sin(n-1)u\sin u & \\ \sin(n-1)u\cos u + \cos(n-1)u\sin u & \\ -\cos(n-1)u\sin u - \sin(n-1)u\cos u & \\ -\sin(n-1)u\sin u + \cos(n-1)u\cos u & \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos nu & -\sin nu \\ \sin nu & \cos nu \end{Vmatrix}.$$

Așadar:

$$A_n = \begin{Vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{Vmatrix}^n = \begin{Vmatrix} \cos nu & -\sin nu \\ \sin nu & \cos nu \end{Vmatrix},$$

$$(\forall)\, n \in N^*.$$

Pentru fiecare n, determinantul matricei care se obține are valoarea 1.

VII.R.2. Să se calculeze:

$$A_n = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^n.$$

Soluție. Să calculăm:

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Folosim tot principiul inducției.

Presupunem că:

$$A_{n-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^{n-1} = \begin{Vmatrix} 1 & (n-1) \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

și calculăm:

$$A_n = A_{n-1} \cdot A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & (n-1) \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Deci:

$$A_n = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^n = \begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

VII.R.3. Să se demonstreze că dacă $AB = BA$, A și B fiind matrici, atunci:

1°). $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

2°). $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$;

3°). $(A + B)^n = A^n + \frac{n}{1} A^{n-1}B +$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A^{n-2}B^2 + \ldots + B^n$$

Soluție.

1°). $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

2°). $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$.

3°). Notăm $P_n = (A + B)^n$ și calculăm:

$$P_1 = A + B,$$

$$P_2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

$$P_3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3, \text{ ș.a.m.d.}$$

VII.R.4. Să se calculeze $AB - BA$ unde:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Soluție. Succesiv:

$$A \cdot B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{Vmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{Vmatrix}$$

deci:

$$AB - BA = \begin{Vmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{Vmatrix}.$$

VII.R.5. Știind că:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \text{ și } f(x) = x^2 - x - I,$$

se cere $f(A)$, I reprezentînd matricea unitate.

Soluție. Calculăm:

$$A^2 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

$$-A = \begin{Vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \text{ și: } -I = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

În final:

$$f(A) = \begin{Vmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{Vmatrix}.$$

VII.R.6. Să se arate că egalitatea $AB - BA = U$ este imposibilă, A, B, fiind matrice cu elemente numere reale.

Soluție. Pentru două matrice oarecare, pătratice:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix},$$

suma elementelor de pe diagonala matricei $A \cdot B$ este aceeași cu suma elementelor diagonalei matricei $B \cdot A$ și anume $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$ (matricele trebuie să fie pătrate pentru a exista $A \cdot B$ și $B \cdot A$).

Suma elementelor diagonalei matricei $AB - BA$ este nulă. Or, suma elementelor diagonalei matricei U este egală cu n.

Observație. Există totuși matrice cu toate elementele unei linii (coloane) „nule" care satisfac egalitatea. De exemplu, dacă:

$$A = \begin{Vmatrix} \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{3} & \hat{0} \end{Vmatrix}$$

atunci:

$$AB = \begin{Vmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \end{Vmatrix}, \quad BA = \begin{Vmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{3} \end{Vmatrix};$$

$$AB - BA = \begin{Vmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{Vmatrix}.$$

Elementele fac parte din clasa de resturi modulo 4.

VII.R.7. Să se determine toate matricele de ordinul al doilea cu toate elementele nenule al căror pătrat este egal cu matricea unitate.

Soluție. Fie:

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{Vmatrix}.$$

Atunci:

$$A^2 = \begin{Vmatrix} a_1^2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 + a_2 b_2 \\ a_1 b_1 + b_1 b_2 & a_2 b_1 + b_2^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

De aici:

$$a_1^2 + a_2 b_1 = 1, \qquad a_1 a_2 + a_2 b_2 = 0$$
$$a_2 b_1 + b_2^2 = 1, \qquad a_1 b_1 + b_1 b_2 = 0.$$

Deducem $a_1 = -b_2$ (deoarece din ecuațiile de pe coloana a doua, $a_2(a_1 + b_2) = b_1(a_1 + b_2) = 0$ și a_2 și b_1 sînt, prin ipoteză, nenule) astfel că mulțimea matricelor care satisfac enunțul este:

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{Vmatrix} a_1 & \dfrac{1 - a_1^2}{b_1} \\ b_1 & -a_1 \end{Vmatrix} \;\middle|\; a_1, b_1 \in R - \{0\} \right\}.$$

VII.R.8. Să se calculeze produsul între A și A^t unde:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \text{ și } A^t = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

Soluție.

$$A \cdot A^t = \begin{Vmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{Vmatrix}$$

iar:

$$A^t \cdot A = \begin{Vmatrix} 25 & 10 & 7 & 18 \\ 10 & 5 & 3 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 5 \\ 18 & 7 & 5 & 13 \end{Vmatrix}.$$

VII.R.9. Folosind înmulțirea matricelor dreptunghiulare, să se demonstreze identitatea lui *Lagrange:*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = \sum_{i<k} (a_ib_k - a_kb_i)^2, \quad a_i, b_i \in R,$$

$$i \in \overline{1, n}.$$

Soluție. Fie $A = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \ldots & b_n \end{Vmatrix}$ și A^t matricea transpusă. Avem:

$$A \cdot A^t = \begin{Vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n & b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 \end{Vmatrix}$$

și $\det(A \cdot A^t) = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$

și valoarea acestui determinant reprezintă partea întîi a egalității de demonstrat.

Dar det $(A \cdot A^t)$ se poate descompune într-o sumă de n determinanți de ordinul doi care se poate scrie:

$$\sum_{i<k} (a_i b_k - a_k b_i)^2.$$

Această observație poate fi verificată pentru cazul $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1b_1 \\ a_1b_1 & b_1^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2b_2 \\ a_1b_1 & b_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3b_3 \\ a_1b_1 & b_3^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_2^2 & a_1b_1 \\ a_2b_2 & b_1^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2b_2 \\ a_2b_2 & b_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3b_3 \\ a_2b_2 & b_3^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_3^2 & a_1b_1 \\ a_3b_3 & b_1^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3^2 & a_2b_2 \\ a_3b_2 & b_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3^2 & a_3b_3 \\ a_3b_3 & b_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2) + (a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 -$$

$$- 2a_1b_1a_3b_3) + (a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3) =$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2.$$

VII.R.10. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}.$$

Soluție. Se obține:

$$D = 1 - \log_a b \cdot \log_b a = 0,$$

cu $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

VII.R.11. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$$

unde $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, $i = \sqrt{-1}$.

Soluție. Se lasă coloana întîi neschimbată și aceeași coloană se scade din coloanele a doua și a treia. Se obține:

$$D = (\omega^2 - \omega)^2 = \left[\left(\cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) + \right.$$

$$\left. + i\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^2 = \left(-2\sin\pi\sin\frac{\pi}{3} + \right.$$

$$\left. + 2i\sin\frac{\pi}{3}\cos\pi\right)^2 = \left(-2i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -3.$$

VII.R.12. Să se calculeze:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Soluție. Calculînd, obținem:

$$D = 1 + i^2 - (1 - i^2) = 1 - 1 - (1 + 1) = -2.$$

VII.R.13. Să se arate că dacă $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in R$ atunci:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Soluție. Primul determinant se mai poate scrie:

$$\begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}.$$

La rîndul său, fiecare determinant se descompune în cîte patru determinanți iar cîte trei din fiecare grupă au cîte două coloane identice (și deci aceștia sînt nuli).

VII.R.14. Să se calculeze:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 \ldots & n-1 & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 \ldots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 \ldots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

Soluție. Lăsînd linia întîi neschimbată și scăzînd-o din elementele celorlalte linii se obține un determinant care are pe diagonala principală elementele 1, 2, 3, ..., $(n-1)$, iar celelalte elementele de sub diagonală sînt egale cu zero. Ca atare, $D = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) = (n-1)!$.

VII.R.15. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_1^{n-1} &= u_1 \\ x_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_2^{n-1} &= u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_1 + x_2\alpha_n + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} &= u_n \end{aligned}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt numere reale distincte între ele.

Soluție. Se observă că determinantul D al sistemului este un determinant *Vandermonde*, ușor de scris sub formă de produs. Cum $\alpha_i \neq \alpha_j$, $(\forall)\, i, j \in \overline{1, n}$, rezultă că $D \neq 0$ și deci se aplică regula lui *Cramer:*

$$x_s = \frac{D_s}{D} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n+s} \cdot u_i}{f'(\alpha_i)} \varphi_{s,i},$$

unde:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$

iar:

$$\varphi_{s,i} = \sum \alpha_{t_1} \cdot \alpha_{t_2} \ldots \alpha_{t_{n-s}},$$

sumarea făcîndu-se după toate combinațiile $t_1, t_2, \ldots, t_{n-s}$ ale numerelor 1, 2, 3, ..., $i-1$, $i+1, \ldots, n$.

VII.R.16. Se consideră sistemul:

$$\lambda x + y + z = 1$$
$$x + \lambda y + z = \lambda \quad \text{cu } \lambda \in R.$$
$$x + y + \lambda z = \lambda^2$$

1°). Să se discute sistemul dat;
2°). Să se rezolve.

(Admitere, Facultatea de matematică, Bucureşti, 1971)

Soluţie. Determinantul sistemului este:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix},$$

deci $D = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$. $D = 0$ pentru $\lambda_1 = -2$ şi $\lambda_2 = 1$.

a°). Dacă $\lambda \neq -2$ şi $\lambda \neq 1$, sistemul este compatibil determinat.

În acest caz, $D_x = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$; $D_y = (\lambda-1)^2$; $D_z = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$, şi deci:

$$x = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}; \quad y = \frac{1}{\lambda+2}; \quad z = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2};$$

soluţie care verifică sistemul.

b°). Dacă $\lambda = -2$ atunci $D = 0$ şi sistemul se scrie:

$$-2x + y + z = 1$$
$$x - 2y + z = -2.$$
$$x + y - 2z = 4$$

Adunînd ecuaţiile obţinem $0 = 3$, absurd, deci sistemul nu are soluţii.

c°). Dacă $\lambda = 1$, atunci $D = 0$; sistemul se reduce la ecuația:

$$x + y + z = 1$$

și are soluțiile:

$$x = \alpha,\ y = \beta,\ z = 1 - \alpha - \beta,\ \alpha, \beta \in R.$$

TESTE

VII.T.1. Se consideră matricea $A = \begin{Vmatrix} a & a \\ -a & a \end{Vmatrix}$.

Să se precizeze dacă A^2 este reprezentată de matricea:

1°). $2a^2 \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$; 2°). $\begin{Vmatrix} 0 & 2a^2 \\ -2a^2 & 0 \end{Vmatrix}$;

3°). $-2a^2 \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

VII.T.2. O matrice dreptunghiulară are 3 linii și 5 coloane. Să se precizeze dacă rangul r al matricei satisface condiția:

1°). $r > 3$; 2°). $r = 3$; 3°). $3 < r < 5$; 4°). $r < 3$.

VII.T.3. Se consideră produsul matricelor $A_{3,1}$ și $B_{2,3}$. Să se precizeze dacă matricea produs $A_{3,1} \times B_{2,3}$ este:

1°). pătratică; 2°). dreptunghiulară.

VII.T.4. Se consideră matricea A și transpusa sa, A^t. Să se precizeze dacă au sens produsele:

1°). $A \cdot A^t$; 2°). $A^t \cdot A$; 3°). $A \cdot A^t \cdot A^{-1}$.

VII.T.5. Știind că $x^3 + 1 = 0$, se cere să se precizeze dacă $A = \begin{Vmatrix} 1 & -x \\ x^2 & 1 \end{Vmatrix}$ este:

1°). matrice nedegenerată; 2°). matrice degenerată.

VII.T.6. Se consideră o matrice pătratică A și se știe că $A = A^2 = A^3 = \ldots = A^n$, $n \in N^*$, n fixat.

Să se precizeze dacă matricea A poate fi:

1°). o matrice neprecizată; 2°). matricea unitate.

VII.T.7. Se consideră $A = \begin{Vmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$, $i = \sqrt{-1}$.

Este posibil să existe $n \in N^*$ astfel ca:

1°). $A^{2n} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$? 2°). $A^{2n+1} = A$?

VII.T.8. Se presupune că:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} \cdot X \cdot \begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Se cere să se precizeze dacă matricea X poate fi:

1°). egală cu matricea unitate; 2°). diferită de matricea unitate și matricea nulă; 3°). matricea nulă.

VII.T.9. În egalitatea:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} \cdot X \cdot \begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

matricea X poate fi:

1°). egală cu matricea unitate; 2°). diferită de matricea unitate.

VII.T.10. Se consideră determinanții:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \text{ și } D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se cere să se precizeze dacă:

1°). $D_1 < D_2$; 2°). $D_1 > D_2$; 3°). $D_1 = D_2$.

VII.T.11. Se cere să se precizeze dacă determinanții:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ și } D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

satisfac condiția:

1°). $D_1 < D_2$; 2°). $D_2 < D_1$; 3°). $D_1 = D_2$.

VII.T.12. Să se precizeze dacă determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -8 \\ 5 & 15 & 55 \end{vmatrix}$$

are valoarea:

1°). număr pozitiv; 2°). număr negativ; 3°). zero.

VII.T.13. Sistemul:

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= a_4 \\ b_1x + b_2y + b_3z &= b_4 \\ c_1x + c_2y + c_3z &= c_4 \end{aligned}$$

unde a_i, b_i, $c_i > 0$ ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$), are soluții:

1°). numere pozitive, 2°). numere negative, 3°). nu are soluție.

VII.T.14. Sistemul:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ x_2 + x_3 &= b \\ x_3 &= c \end{aligned} \quad , \; a \neq 0$$

are soluția:

1°). $x_1 = a - b$, $x_2 = b - c$, $x_3 = c$; 2°). $x_1 = x_2 = x_3 = a - b + c$.

VII.T.15. Se consideră sistemul:

$$\begin{aligned} ay + bx &= c \\ cx + az &= b \\ bz + cy &= a, \; a,b,c \neq 0. \end{aligned}$$

Știind că $x = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$; se pot preciza expresiile corespunzătoare pentru y și z:

1°). prin permutări circulare; 2°). înlocuind pe x în ecuațiile care-l cuprind?

VII.T.16. Sistemul:

$$x - 2y + z = 0$$
$$y - 2z + x = -3$$
$$z - 2x + y = 3$$

este:

1°). unic determinat; 2°). compatibil nedeterminat; 3°). incompatibil.

RĂSPUNSURI

VII.T.1. 1°). da; 2°). da; 3°). da. **VII.T.2.** 1°). nu; 2°). este posibil; 3°). nu; 4°). este posibil. **VII.T.3.** 1°). nu; 2°). nu — înmulțirea nu este posibilă. **VII.T.4.** 1°). da; 2°). da; 3°). nu întotdeauna. **VII.T.5.** 1°). nu; 2°). da. **VII.T.6.** 1°). este posibil; 2°). sigur. **VII.T.7.** 1°). da; 2°). da. **VII.T.8.** 1°). nu; 2°). da; 3°). nu. **VII.T.9.** 1°). da; 2°). nu. **VII.T.10.** 1°). nu; 2°). nu; 3°). da. **VII.T.11.** 1°). nu; 2°). nu; 3°). da. **VII.T.12.** 1°). nu; 2°). nu; 3°). da (linia întîi și a doua au elementele proporționale). **VII.T.13.** Nu se poate da răspuns precis. Depinde de coeficienți. **VII.T.14.** 1°). da; 2°). nu. **VII.T.15.** 1°). da; 2°). da; se obține: $y = \frac{-b^2 + c^2 + a^2}{2ca}$; $z = \frac{-c^2 + a^2 + b^2}{2ab}$. **VII.T.16.** 1°). nu; 2°). da. Soluție: $(u - 2, u - 1, u)$, $u \in R$; 3°). nu.

PROBLEME PROPUSE

VII.P.1. Cum se schimbă rangul unei matrice dacă se adaugă:
1°). o coloană? 2°). o linie?

VII.P.2. Să se calculeze A^5 unde $A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{Vmatrix}$.

VII.P.3. Să se determine $f(A)$ unde $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{Vmatrix}$ şi $f(x) = x^2 - 2x + U$, U fiind matricea unitate.

VII.P.4. Pentru orice matrice $A_{n,n}$ se poate determina un polinom P astfel încît $P(A_{n,n}) = 0$?

VII.P.5. Să se determine inversa matricei:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

VII.P.6. Să se determine inversa matricei:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

VII.P.7. Să se determine mulţimea matricelor alcătuite din numere reale $A_{2,2}$ astfel încît $A_{2,2}^3 = U$.

VII.P.8. Să se determine mulţimea matricelor $A_{3,3}$ astfel încît $A_{3,3}^2 = U$.

VII.P.9. Să se calculeze:

$$\begin{vmatrix} 18385 & 18395 \\ 17302 & 17312 \end{vmatrix}.$$

VII.P.10*. Să se calculeze:

$$D = \begin{vmatrix} x & x+y & x+2y & \dots & x+(n-1)y \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots -x & x \end{vmatrix}.$$

VII.P.11[1]**.** Să se calculeze:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos u & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 1 & 2\cos u & 1 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & 2\cos u \end{vmatrix}.$$

determinantul fiind de tip $n \times n$.

VII.P.12[1]**.** Să se calculeze:

$$D = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

VII.P.13*. Să se calculeze:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1+\sin u_1 & 1+\sin u_2 & \dots & 1+\sin u_n \\ \sin u_1+\sin^2 u_1 & \sin u_2+\sin^2 u_2 & \dots & \sin u_n+\sin^2 u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{n-2}u_1+\sin^{n-1}u_1 & \sin^{n-2}u_2+\sin^{n-1}u_2 & \dots & \sin^{n-2}u_n+\sin^{n-1}u_n \end{vmatrix}.$$

VII.P.14. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} \cos x & 7 \\ \sin x & 2\cos x \end{vmatrix} = 5.$$

VII.P.15. Să se scrie sub formă de produs determinantul:

$$\begin{vmatrix} b-c & c-a & a-b \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2-c^2 & c^2-a^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}.$$

VII.P.16. Este posibilă egalitatea:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} ?$$

VII.P.17[1]. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} \sin a_1 & \sin 2a_1 & \sin 3a_1 & \sin 4a_1 \\ \sin a_2 & \sin 2a_2 & \sin 3a_2 & \sin 4a_2 \\ \sin a_3 & \sin 2a_3 & \sin 3a_3 & \sin 4a_3 \\ \sin a_4 & \sin 2a_4 & \sin 3a_4 & \sin 4a_4 \end{vmatrix}.$$

VII.P.18. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = 0$$

cu $a_3 \neq a_1 \neq a_2 \neq a_3$. *Generalizare.*

VII.P.19*. Să se calculeze:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2} & \binom{x_2}{2} & \dots & \binom{x_n}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix}$$

unde $\binom{x}{k} = C_x^k = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}$ și $x_i \geqslant n -$ $- 1$, $(\forall)\, i \in \overline{1, n}$. Aici, $x_i \in N, (\forall) i \in \overline{1, n}$.

VII.P.20. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

VII.P.21*. Să se dezvolte determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_0 \end{vmatrix},$$

unde $a_1, \ldots, a_{n-1} \in R$.

VII.P.22*. Să se calculeze:

$$D = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \ldots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & 2^2 \ldots & (n-1)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \ldots & 1^2 \end{vmatrix}$$

știind că:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

VII.P.23[1]. Se consideră ecuația $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ și se cere să se calculeze s_1, s_2, s_3, s_4 și apoi:

$$D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

unde $s_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, x_1, x_2, x_3 reprezentînd rădăcinile ecuației.

VII.P.24. Pentru ce valori ale lui $m \in R$ sistemul:

$$x + (m+1)y + z = 1,$$
$$2x - y + z = 3,$$
$$3x + my - (m-1)z = 4,$$

este compatibil determinat?

VII.P.25. Să se arate că sistemul:

$$x + y + z = 0,$$
$$2x + 3y - z = 0,$$
$$x - 2y + 10z = 0.$$

admite și soluții diferite de soluția banală.

VII.P.26. În ce caz sistemul:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$
$$a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n = b^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots a_n^{n-1}x_n = b^{n-1}$$

este compatibil determinat?

VII.P.27. Să se studieze sistemul:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$x\sin\alpha + y\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha.$$

VII.P.28. Să se rezolve sistemul:

$$a^2x + ay + z = (a-b)(a-c),$$
$$b^2x + by + z = (b-c)(b-a),$$
$$c^2x + cy + z = (c-a)(c-b).$$

VII.P.29. Să se discute și să se rezolve sistemul:

$$mx + y = m + n$$
$$x + (m-n)y = 1$$
$$(m+n)x + my = n$$
$$mx + ny = m + n, \quad n \neq 0.$$

VII.P.30. Să se rezolve sistemul:

$$4x + 3y - 2z = 5$$
$$8x + 5y - 4z = 9.$$

VII.P.31. Să se rezolve sistemul:

$$px + (p + 1)y + (p + 2)z = 0$$
$$qx + (q + 1)y + (q + 2)z = 0.$$

VII.P.32. Să se rezolve sistemul:

$$mx + my + z = 0$$
$$mx + y + mz = 0$$
$$x + my + mz = 0.$$

VII.P.33. În condiția $A + B + C = 180°$, să se rezolve sistemul:

$$x = y \cos C + z \cos B$$
$$y = z \cos A + x \cos C$$
$$z = x \cos B + y \cos A.$$

INDICAȚII

VII.P.1. Se va ține seama de rangul matricei dacă este pătratică sau de numărul minim care determină tipul matricei (cînd este dreptunghiulară).

VII.P.2. Se calculează A^2, apoi $A^2 \cdot A^2$ și apoi $A^4 \cdot A$.

VII.P.3. Se observă că $f(x) = (x - U)^2$ și se calculează $A - U$ apoi $(A - U)^2$.

VII.P.4. Se ține seama că P este de forma $P(x) = Ua_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_mx^m$;

$$P(A) = a_0U + a_1A_{n,n} + \ldots + a_mA^m_{n,n} = 0.$$

Apoi se folosește faptul că se pot determina coeficienții a_i rezolvînd un sistem liniar omogen cu $m + 1$ necunoscute și n^2 ecuații.

VII.P.5. Se poate proceda prin identificare sau folosind matricea reciprocă.

VII.P.6. Analog cu problema precedentă (se calculează determinantul corespunzător pentru a ști dacă admite sau nu matrice inversă).

VII.P.7. Se pune condiția: $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}^3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

VII.P.8. Se scrie:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

VII.P.9. Se observă că elementele din aceeași linie diferă prin 10.

VII.P.10*. Adunînd toate celelalte coloane la coloana întîi se constată că determinantul se poate reduce la un determinant cu proprietăți deosebite.

VII.P.11[1]. Se determină o relație de recurență.

VII.P.12[1]. Se observă particularitatea determinantului (este de tip *Vandermonde*).

VII.P.13*. Fiecare coloană reprezintă o sumă. Determinantul se poate descompune într-o sumă de determinanți.

VII.P.14. Se ajunge la o ecuație de gradul al doilea în $\sin x$.

VII.P.16. Liniile primului determinant se înmulțesc prin a, respectiv b, c (în ipoteza că $a, b, c \neq 0$).

VII.P.17[1]. Se scad elementele coloanei întîi din cele ale coloanei a treia și elementele coloanei a doua

din cele ale coloanei a patra, transformînd diferențele în produs.

VII.P.18. Determinantul este de tip *Vandermonde*.

VII.P.19*. Se scad elementele coloanei întîi din elementele celorlalte coloane.

VII.P.21*. Se constată că $D = \prod_{k=0}^{n-1} (a_0 + a_1 e_k + a_2 e_k^2 + \ldots + a_{n-1} e_k^{n-1})$, unde $e_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$.

VII.P.22*. În fiecare linie există pătratele primelor n numere naturale.

Se obține $D = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{12} n^{n-2} \cdot [(n+2)^n - n^n]$.

VII.P.23[1]. Se știe că $x_1 + x_2 + x_3 = -3$; $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$, $x_1x_2x_3 = 2$.

Pe de altă parte, oricare ar fi rădăcina $x_i (i = 1, 2, 3)$, are loc egalitatea:

$$x_i^3 + 3x_i^2 - 2 = 0$$

și de aici:

$x_i^n + 3x_i^{n-1} - 2x_i^{n-3} = 0$, $i = 1, 2, 3$, $(\forall)\, n \in N$, $n \geqslant 3$.

VII.P.24. Se cercetează determinantul sistemului:

$$D = (m + 1)(2m + 3).$$

VII.P.25. Se calculează:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 10 \end{vmatrix}.$$

VII.P.26. Determinantul sistemului este de tip *Vandermonde*.

VII.P.27. Determinantul sistemului este egal cu $\cos 2\alpha$.

VII.P.28. Determinantul sistemului este de tip *Vandermonde.*

VII.P.29. Se cercetează rangul matricei sistemului şi matricei complete a sistemului.

VII.P.30. Rangul matricei sistemului este egal cu 2. Sistemul are o infinitate de soluţii.

VII.P.31. Se va observa că pentru $p = q$ sistemul are soluţii, fiind nedeterminat.

VII.P.32. Se va cerceta condiţia în care determinantul sistemului este nul.

VII.P.33. Se ţine seama de faptul că are loc egalitatea:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

în condiţia dată.

SOLUŢII

VII.P.1. Dacă matricea este pătratică, rangul nu se schimbă dacă nu se poate obţine un determinant de ordinul n (tipul matricei fiind $n \times n$) diferit de zero.

Discuţie analoagă în cazul în care matricea este dreptunghiulară.

VII.P.2. Însemnînd prin A matricea dată se obţine:

$$A^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{Vmatrix}; \quad A^4 = \begin{Vmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{Vmatrix};$$

$$A^5 = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{Vmatrix}.$$

VII.P.3. Se calculează:

$$A - U = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix} \text{ apoi } (A - U)^2 = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 7 \end{Vmatrix}.$$

VII.P.4. Fie un polinom $P(x) = a_0 U x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ și A matricea patratică de ordinul n.

Condiția $P(A) = O$ se scrie:

$$P(A) = a_0 U + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_m A^m = O,\ a_m \neq 0,$$

(O fiind matricea zero).

Identificăm și obținem n^2 ecuații omogene în care figurează coeficienții $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ (sînt $m + 1$ necunoscute). Dacă $m + 1 \geqslant n^2$, înseamnă că sistemul, fiind omogen liniar, are cel puțin o necunoscută mai mult decît numărul ecuațiilor și deci sistemul poate avea și soluții diferite de cele banale.

Se poate pune o problemă interesantă privind unicitatea polinomului P. Considerînd că $A_{n,n}$ este matricea unitate de tipul $n \times n$, polinomul P nu este unic. Ce se întîmplă însă cînd $A_{n,n}$ nu este egală cu matricea unitate?

În cazul în care $m + 1 < n^2$, facem o discuție analogă, încadrîndu-se în acest caz în tabloul general al analizei sistemelor liniare.

Caz particular. Considerăm cazul:

$$A = \begin{Vmatrix} u & v \\ z & w \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\ n^2 = 4;\ m = 5,$$

$$P(x) = a_0 U + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5,$$

$$P(A) = a_0 U + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4 + a_5 A^5,$$

$$P(A) = a_0 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + a_1 \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + a_2 \begin{Vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} +$$

$$+ a_3 \begin{Vmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + a_4 \begin{Vmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + a_5 \begin{Vmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = 0$$

de unde rezultă:

$$\begin{Vmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a_1 & -2a_1 \\ 0 & a_1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a_2 & -4a_2 \\ 0 & a_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a_3 & -6a_3 \\ 0 & a_3 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} a_4 & -8a_4 \\ 0 & a_4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a_5 & -10a_5 \\ 0 & a_5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

şi deci:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0,$$
$$-2a_1 - 4a_2 - 6a_3 - 8a_4 - 10a_5 = 0,$$

sau încă:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0,$$
$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 0,$$

de unde se obţine:

$$a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5,$$
$$a_1 = -2a_2 - 3a_3 - 4a_4 - 5a_5,$$

iar pentru $a_4 = a_5 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$ rezultă $a_0 = -1$, $a_1 = 1$ şi astfel:

$$P(x) = -U + x + x^2 - x^3,$$

deci:

$$P(A) = -\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^2 -$$

$$-\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^3 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Polinomul a fost considerat de gradul al cincilea; fără a contrazice însă rezultatele anterioare, am admis $a_5 = 0$.

Pentru $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$ $a_5 = 0$, se obține $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ și $P(x) = U - x - x^3 + x^4$, deci:

$$P(A) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Se constată că cele două polinoame se scriu:

$$-(x + U)(x - U)^2;\ (x - U)^2(U + x + x^2)$$

și admit ca divizor comun pe $(x - U)^2$. Aceasta înseamnă că polinomul de gradul cel mai mic tu proprietatea din enunț care se poate obține este:

$$P(x) = U - 2x + x^2.$$

În adevăr:

$$P(A) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

VII.P.5. Determinantul matricei este egal cu -18, deci matricea este inversabilă. Succesiv:

$$A^* = \begin{Vmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{Vmatrix}; \qquad A^{-1} = -\frac{1}{18} A^* \text{ și}$$

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} \\ \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{Vmatrix}.$$

Observație. Matricea A^{-1} se poate determina și astfel:

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{Vmatrix}$$

de unde:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1;\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0;$$
$$z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 0,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0;\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 = 1;$$
$$2z_1 + 3z_2 + z_3 = 0,$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0;\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 = 0;\ 3z_1 + z_2 + 2z_3 = 1.$$

Rezolvînd sistemul, se obține aceeași soluție.

VII.P.6. Se constată ușor că determinantul corespunzător matricei este nul și deci matricea considerată este degenerată.

VII.P.7. Fie $A_{2,2} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{Vmatrix}$. Condiția $A_{2,2}^3 = U$ se traduce prin:

$$x_1^3 + x_1x_2y_1 + x_2x_1y_1 + x_2y_1y_2 = 1, \quad (1)$$
$$x_1^2x_2 + x_1x_2y_2 + x_2^2y_1 + x_2y_2^2 = 0, \quad (2)$$
$$x_1^2y_1 + x_2y_1^2 + x_1y_1y_2 + y_1y_2^2 = 0, \quad (3)$$
$$x_1x_2y_1 + x_2y_1y_2 + x_2y_1y_2 + y_2^3 = 1. \quad (4)$$

Din (1) și (4) se deduce, sau $x_1 = y_2$, sau:

$$x_1^2 + x_1y_2 + y_2^2 + x_2y_1 = 0 \text{ etc.}$$

VII.P.8. Analog cu problema precedentă, se consideră:

$$A_{3,3} = \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{Vmatrix}$$

și se pune condiția:

$$A_{3,3}^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

VII.P.9. Determinantul se scrie:

$$\begin{vmatrix} 18385 & 18385+10 \\ 17302 & 17302+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18385 & 18385 \\ 17302 & 17302 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 18385 & 10 \\ 17302 & 10 \end{vmatrix} = 183850 - 173020 = 10830.$$

Observație. În general:

$$\begin{vmatrix} a & a+m \\ b & b+m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & m \\ b & m \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = m \cdot (a-b).$$

VII.P.10*. Se observă că elementele liniei întîi fiind în progresie aritmetică iar elementele celorlalte avînd suma egală cu zero, adunăm coloanele a doua și următoarele la elementele coloanei întîi și determinantul se poate scrie ca fiind produsul între $\frac{2x+(n-1)y}{2}n$ și un determinant în care elementele situate dedesubtul diagonalei principale fiind nule, valoarea acestui determinant este egală cu produsul elementelor de pe diagonală (egal cu x^{n-1}). În final:

$$D = \frac{nx^{n-1}}{2}[2x+(n-1)y].$$

VII.P.11[1]**.** Determinantul are diagonala principală formată din 2 cos u, iar paralel cu această diagonală sînt elemente egale cu 1.

Fie 2 cos $u = t$ și particularizăm. Pentru $n = 2$ se obține:

$$D_2 = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 = 4\cos^2 u - 1 = \frac{\sin 3u}{\sin u}$$

Pentru $n = 3$ se obține:

$$D_3 = \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = t^3 - 2t = 8\cos^3 u - 4\cos u = \frac{\sin 4u}{\sin u},$$

Pentru $n = 4$ se obține:

$$D_4 = \begin{vmatrix} t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{vmatrix} = t^4 - 3t^2 + 1 =$$

$$= 16\cos^4 u - 12\cos^2 u + 1 = \frac{\sin 5u}{\sin u}.$$

Se constată ușor că $D_n = tD_{n-1} - D_{n-2}$, dezvoltînd după elementele primei linii.

Prin inducție se demonstrează că:

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\,u}{\sin u}.$$

În adevăr:

$$2\cos u \cdot D_{n-1} - D_{n-2} = \frac{2\cos u \sin n\,u}{\sin u} -$$

$$- \frac{\sin(n-1)\,u}{\sin u} =$$

$$= \frac{\sin(n+1)\,u + \sin(n-1)\,u - \sin(n-1)\,u}{\sin u} = D_n.$$

VII.P.12[1]. Determinantul este de tip *Vandermonde*. Dacă notăm $b_i = a - i + 1$, obținem::

$$D = \begin{vmatrix} b_1^n & b_2^n \ldots b_n^n & b_{n+1}^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1^3 & b_2^3 \ldots b_n^3 & b_{n+1}^3 \\ b_1^2 & b_2^2 \ldots b_n^2 & b_{n+1}^2 \\ b_1 & b_2 \ldots b_n & b_{n+1} \\ 1 & 1 \ldots 1 & 1 \end{vmatrix}$$

și atunci:

$$D_{n+1} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n+1} (b_i - b_j),$$

astfel că determinantul propus se deduce din precedentul cu ajutorul substituțiilor:

$$b_i = a - i + 1,\ i \in \overline{1,\ n+1}.$$

VII.P.13*. Să considerăm un caz particular și anume un determinant de ordinul al patrulea:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sin u_1 & 1+\sin u_2 \\ \sin u_1+\sin^2 u_1 & \sin u_2+\sin^2 u_2 \\ \sin^2 u_1+\sin^3 u_1 & \sin^2 u_2+\sin^3 u_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sin u_3 & 1+\sin u_4 \\ \sin u_3+\sin^2 u_3 & \sin u_4+\sin^2 u_4 \\ \sin^2 u_3+\sin^3 u_3 & \sin^2 u_4+\sin^3 u_4 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd și grupînd convenabil termenii se obține:

$$D_4 = 2^6 \cdot \cos\frac{u_4+u_3}{2}\cos\frac{u_4+u_2}{2}\cos\frac{u_4+u_1}{2}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{u_3+u_2}{2}\cdot\cos\frac{u_3+u_1}{2}\cos\frac{u_2+u_1}{2}\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{u_4-u_3}{2}\sin\frac{u_4-u_2}{2}\sin\frac{u_4-u_1}{2}\sin\frac{u_3-u_2}{2}\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{u_3-u_1}{2}\cdot\sin\frac{u_2-u_1}{2}\cdot$$

Deci:

$$D_4 = 2^{\frac{4(4-1)}{2}}\prod_{4\geq i>k\geq 1}\cos\frac{u_i+u_k}{2}\cdot$$

$$\cdot\prod_{4\geq i>k\geq 1}\sin\frac{u_i-u_k}{2}\cdot$$

Din aproape în aproape se obține că:

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{n\geq i>k\geq 1}\cos\frac{u_i+u_k}{2}\prod_{n\geq i>k\geq 1}\sin\frac{u_i-u_k}{2}\cdot$$

VII.P.14. Se obține ecuația $2\sin^2 x + 7\sin x + 3 = 0$ de unde $\sin x_1 = -\frac{1}{2}$ și deci $x_1 = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$, $x_2 = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$, $k \in Z$.

VII.P.15. Adunînd coloanele a doua și a treia la coloana întîi se obține determinantul:

$$\begin{vmatrix} 0 & c-a & a-b \\ 2(a+b+c) & c+a & a+b \\ 0 & c^2-a^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(a+b+c)\begin{vmatrix} c-a & a-b \\ c^2-a^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd, se obține:

$$2(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c).$$

VII.P.16. Presupunem $a, b, c \neq 0$. Primul determinant se înmulțește cu produsul abc, factorii fiind repartizați astfel:

a, pentru linia întîi,
b, pentru linia a doua,
c, pentru linia a treia

și se obține:

$$\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Dacă cel puțin unul din numerele a, b, c este egal cu zero, fie acesta a, atunci calculul direct al determinanților justifică egalitatea din enunț.

VII.P.17[1]. Se scad elementele coloanei întîi din cele ale coloanei a treia și elementele coloanei a doua din

cele ale coloanei a patra și transformînd diferențele în produs și dînd factor comun, obținem:

$$D = 2^3 \sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 \sin a_4 \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos a_1 & \cos 2a_1 & \cos 3a_1 \\ 1 & \cos a_2 & \cos 2a_2 & \cos 3a_2 \\ 1 & \cos a_3 & \cos 2a_3 & \cos 3a_3 \\ 1 & \cos a_4 & \cos 2a_4 & \cos 3a_4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2^3 \sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 \sin a_4 \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos a_1 & 2\cos^2 a_1 - 1 & 4\cos^3 a_1 - 3\cos a_1 \\ 1 & \cos a_2 & 2\cos^2 a_2 - 1 & 4\cos^3 a_2 - 3\cos a_2 \\ 1 & \cos a_3 & 2\cos^2 a_3 - 1 & 4\cos^3 a_3 - 3\cos a_3 \\ 1 & \cos a_4 & 2\cos^2 a_4 - 1 & 4\cos^3 a_4 - 3\cos a_4 \end{vmatrix}$$

Adunînd în ultimul determinant elementele coloanei întîi la cele ale coloanei a treia și elementele coloanei a doua înmulțite cu 3 la acelea ale coloanei a treia, obținem:

$$D = 2^6 \sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 \sin a_4 \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos a_1 & \cos^2 a_1 & \cos^3 a_1 \\ 1 & \cos a_2 & \cos^2 a_2 & \cos^3 a_2 \\ 1 & \cos a_3 & \cos^2 a_3 & \cos^3 a_3 \\ 1 & \cos a_4 & \cos^2 a_4 & \cos^3 a_4 \end{vmatrix},$$

ultimul determinant fiind de tip *Vandermonde* în $\cos a_1$, $\cos a_2$ $\cos a_3$, $\cos a_4$. Rezultă:

$$D = 2^{12}\left(\prod_{i=1}^{4} \sin a_i\right) \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 4} (\cos a_j - \cos a_i).$$

Generalizînd pentru:

$$D_n = \begin{vmatrix} \sin a_1 & \sin 2a_1 \ldots \sin na_1 \\ \sin a_2 & \sin 2a_2 \ldots \sin na_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sin a_n & \sin 2a_n \ldots \sin na_n \end{vmatrix}$$

deducem:

$$D_n = 2^{n(n-1)} \prod_{i=1}^{n} \sin a_i \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \sin \frac{a_i - a_k}{2} \sin \frac{a_i + a_k}{2}.$$

VII.P.18. Determinantul este tip *Vandermonde*. Ecuația se poate scrie și sub forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^2 & a_1 & a_2 & a_3 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ x^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = 0$$

sau:

$$(a_3 - x)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - x)(a_2 - \\ - a_1)(a_1 - x) = 0.$$

De aici:

$$x_3 = a_3,\ x_2 = a_2,\ x_1 = a_1.$$

În adevăr, dacă x se înlocuiește succesiv prin a_1, a_2, a_3 se obține de fiecare dată un determinant cu valoarea zero pentru că determinantul obținut are cîte două coloane identice.

Problema se poate generaliza. Ecuația:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

are rădăcinile $x_i = a_i,\ i = 1, 2, \dots, (n-1)$.

VII.P.19*. Linia a doua o înmulțim cu 1!, linia a treia se înmulțește cu 2! linia de ordinul $k+1$ se înmulțește prin $k!(k \in \overline{1, n-1})$.

Se obține:

$$D = \frac{1}{1! \cdot 2! \ldots (n-1)!} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1!\, C_{x_1}^1 & 1!\, C_{x_2}^1 & \ldots & 1!\, C_{x_n}^1 \\ 2!\, C_{x_1}^2 & 2!\, C_{x_2}^2 & \ldots & 2!\, C_{x_n}^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (n-1)!\, C_{x_1}^{n-1} & (n-1)!\, C_{x_2}^{n-1} & \ldots & (n-1)!\, C_{x_n}^{n-1} \end{vmatrix};$$

$$D = \frac{1}{1! \cdot 2! \ldots (n-1)!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ A_{x_1}^1 & A_{x_2}^1 & \ldots & A_{x_n}^1 \\ A_{x_1}^2 & A_{x_2}^2 & \ldots & A_{x_n}^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_{x_1}^{n-1} & A_{x_2}^{n-1} & \ldots & A_{x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

unde $x_i \geqslant n-1$.

Se lasă coloana întîi neschimbată și apoi se scad elementele acestei coloane din elementele coloanelor a doua, a treia, etc.

Se obține:

$$D = \frac{1}{1! \cdot 2! \ldots (n-1)!} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} A_{x_2}^1 - A_{x_1}^1 & A_{x_3}^1 - A_{x_1}^1 & \ldots & A_{x_n}^1 - A_{x_1}^1 \\ A_{x_2}^2 - A_{x_1}^2 & A_{x_3}^2 - A_{x_1}^2 & \ldots & A_{x_n}^2 - A_{x_1}^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_{x_2}^{n-1} - A_{x_1}^{n-1} & A_{x_3}^{n-1} - A_{x_1}^{n-1} & \ldots & A_{x_n}^{n-1} - A_{x_1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

La fiecare coloană apare cîte un factor și anume, la coloana 1 : $x_2 - x_1$; la coloana a 2-a: $x_3 - x_1$ și așa mai departe.

Se obține:

$$D = \frac{1}{1! \cdot 2! \ldots (n-1)!} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots (x_n - x_1) \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 + x_1^{-1} & x_3 + x_1^{-1} & \ldots x_n + x_1^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

Procedînd în continuare la fel (scăzînd elementele coloanei întîi din elementele celorlalte coloane) se mai obține produsul $(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \dots (x_n - x_2)$ etc.

Deci $D = \dfrac{1}{1! \cdot 2! \dots (n-1)!} \prod_{n \geq i > k \geq 1} (x_i - x_k)$.

VII.P.20. Fie $x \neq 0$. Determinantul se poate scrie:

$$x^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & x & x^3 \\ x^3 & x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3x & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^3 & x-x^3 & 1-x^4 & 1-x^6 \\ 1 & 1 & 2x & 3x^3 \\ 4x^3 & 3x-4x^3 & 2-4x^4 & 1-4x^6 \end{vmatrix} =$$

$$= x^2(1-x^2) \begin{vmatrix} x & 1+x^2 & 1+x^2+x^4 \\ 1 & 2x & 3x^3 \\ 3x-4x^3 & 2-4x^4 & 1-4x^6 \end{vmatrix}$$

(s-au scăzut elementele coloanei întîi din coloana a doua, apoi înmulțite cu x s-au scăzut din coloana a treia și înmulțite cu x^3 s-au scăzut din elementele coloanei a patra). Procedînd în continuare în același fel, ecuația se scrie:

$$x^2(x^2-1)^4 = 0.$$

Verificarea pentru $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$ se face imediat (se observă că și $x=0$ este soluție, verificînd în enunț).

VII.P.21*. Determinantul este ciclic. Dacă se notează:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

atunci determinantul are valoarea egală cu:

$$\prod_{k=0}^{n-1} (a_0 + a_1\varepsilon_k + a_2\varepsilon_k^2 + \dots + a_{n-1}\varepsilon_k^{n-1}),$$

fapt ce se poate dovedi prin inducție.

Pentru $n = 2$ se obține determinantul:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_1^2$$

sau:

$$D_2 = (a_0 + a_1 e_0)(a_0 + a_1 e_1) = a_0^2 + a_0 a_1 e_1 + a_0 a_1 e_0 + a_1^2 e_0 e_1.$$

Dar $e_0 = 1$, $e_1 = \cos \frac{2\pi}{2} + i \sin \frac{2\pi}{2} = -1$. Deci:

$$D_2 = a_0^2 - a_0 a_1 + a_0 a_1 - a_1^2 = a_0^2 - a_1^2.$$

VII.P.22*. Determinantul este ciclic. Ținînd seama de rezultatul obținut în cazul precedent și notînd:

$$a_0 = 1^2,\ a_1 = 2^2,\ a_2 = 3^2,\ \ldots,\ a_{n-1} = n^2,$$

se obține:

$$D = \prod_{k=0}^{n-1} (1^2 + 2^2 e_k + 3^2 e_k^2 + \ldots + n^2 e_k^{n-1})$$

unde $e_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$. Deci:

$$D = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{12} \cdot n^{n-2} [(n+1)^2 - n^n].$$

VII.P.23[1]. Punînd condiția ca x_1, x_2, x_3 să verifice ecuația, se obțin egalitățile:

$$x_1^3 + 3x_1^2 - 2 = 0,$$
$$x_2^3 + 3x_2^2 - 2 = 0,$$
$$x_3^3 + 3x_3^2 - 2 = 0.$$

Înmulțindu-le respectiv cu x_1^{n-3}, x_2^{n-3}, x_3^{n-3} și adunînd relațiile astfel obținute se ajunge la $s_n + 3s_{n-1} - 2s_{n-3} = 0$ și deci:

pentru $n = 3$, $s_3 + 3s_2 - 6 = 0$,
pentru $n = 4$, $s_4 + 3s_3 - 2s_1 = 0$.

Pe de altă parte, $x_1 + x_2 + x_3 = -3$ adică $s_1 = -3$, $s_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 9$, $s_3 = 6 - 3s_2 = -21$, $s_4 = 2s_1 - 3s_3 = 57$.

Determinantul se scrie:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 9 \\ -3 & 9 & -21 \\ 9 & -21 & 57 \end{vmatrix} = 27 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -7 \\ 3 & -7 & 19 \end{vmatrix} =$$

$$= 27 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 108.$$

VII.P.24. Se calculează determinantul principal al sistemului:

$$D = (2m + 3)(m + 1).$$

Pentru $m \notin \left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}$, sistemul este unic determinat.

VII.P.25. Determinantul sistemului este:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Există soluții nebanale; rezolvînd sistemul:

$$\begin{aligned} x + y &= -z \\ x - 2y &= -10z, \end{aligned} \qquad x = -4z;\ y = 3z.$$

Dacă $z = k$, $k \in R$, sistemul are soluția $(-4k, 3k, k)$. Verificarea este imediată.

VII.P.26. Determinantul sistemului este:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Dacă $a_i \neq a_j, (\forall)\ i \neq j,\ i, j \in \overline{1, n}$, sistemul este compatibil, cu soluție unică.

VII.P.27. Pentru ca tg α și ctg α să existe, este necesar ca:

$$\alpha \neq k\pi,\ k \in Z \text{ și } \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in Z \text{ și deci } \alpha \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Determinantul sistemului este $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$.

Pentru $\alpha \neq k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ sistemul este compatibil cu soluția unică:

$$x = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{1}{(\sin \alpha + \cos \alpha)};$$

$$y = \frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + + \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha(\cos \alpha + \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{1 + \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{2 + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha(\cos \alpha + \sin \alpha)}.$$

Pentru $k \in 2Z$ și $\alpha = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, sistemul este nedeterminat, avînd o infinitate de soluții.

Pentru $k \in Z - 2Z$ sistemul este imposibil.

VII.P.28. Determinantul sistemului este:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(c - a)(c - b)(b - a).$$

Pentru $a \neq b \neq c \neq a$, sistemul este compatibil determinat. În acest caz se obține: $x = 3$; $y = -2(a+b+c)$, $z = ab + bc + ca$.

VII.P.29. Comparînd ecuația întîi cu ecuația a patra se constată că dacă sistemul are soluții, atunci $n = 1$.

În acest caz sistemul se reduce la:

$$mx + y = m + 1$$
$$x + (m - 1)y = 1$$
$$(m + 1)x + my = 1.$$

Dacă $m = -1$, sistemul este compatibil determinat, cu $x = -1$, $y = -1$.

Uultimele două ecuații conduc la determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & m-1 \\ m+1 & m \end{vmatrix} = m - m^2 + 1 = -(m^2 - m - 1).$$

Dacă $m^2 - m - 1 = 0$ deci $m = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, sau $m = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$, sistemul este incompatibil etc.

VII.P.30. Determinantul format de coeficienții lui x și y are valoarea -4. Sistemul are o infinitate de soluții:

$$x = \frac{1}{2}(1 + k),\ y = 1,\ z = k,\ k \in R.$$

VII.P.31. Se observă că pentru $p = q$ sistemul se reduce la o singură ecuație cu trei necunoscute dacă $p \notin \{-2, -1, 0\}$ sau cu două necunoscute dacă $p \in \{-2, -1, 0\}$. Dacă $p \neq q$ atunci scăzînd o ecuați din alta se obține $x + y + z = 0$ etc.

VII.P.32. Determinantul sistemului este:

$$D = \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ m & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = (2m + 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} =$$
$$= (2m + 1)(m - 1)^2.$$

Pentru $m \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ sistemul admite și soluții nebanale.

VII.P.33. Determinantul sistemului este:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 B + 2 \cos A \cos B \cos C - 1.$$

Dar cum $A + B + C = 180°$ rezultă, avînd loc egalitatea:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C,$$

că $D = 0$ și sistemul are și soluții nebanale.

Se obține $x = \frac{\sin A}{\sin C} \cdot k; y = \frac{\sin B}{\sin C} \cdot k, z = k, k \in R,$ expresii care satisfac sistemul (în condiția $A + B + C = 180°$).

Observație. Dacă $x = a$, $y = b$, $z = c$ ar fi laturile triunghiului cu unghiurile A, B, C, apar relații cunoscute:

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= c \cos A + a \cos C \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad a = \frac{\sin A}{\sin C} \cdot c; \quad b = \frac{\sin B}{\sin C} \cdot c$$

și se vede imediat soluția $x = a$, $y = b$, $z = c$.

VII.4.0. Polinoame.

VII.4.0.1. Fie $M \subseteq R$ o mulțime nevidă pe care sînt definite operațiile $+$, $\cdot$ împreună cu care formează corp și $x \in M$. Numim *funcție polinomială* sau chiar *polinom*, orice funcție $E: M \to R$ definită prin:

$$E(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \qquad (1)$$

cu $a_i \in M$, $(\forall)\, i \in \overline{0, n}$, $a_0 \neq 0$, sau altfel scris:

$$E = (a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Expresia $E(x)$ o numim *expresie polinominală* sau chiar, în cazurile în care nu apar confuzii, *polinom*.

VII.4.0.1.1. *Exemplu.* Funcția $f:R \to R$ definită prin:

$$f(x) = x^2 + 3x - 2$$

este o funcție polinominală dar funcția $g:R \to R$ definită prin:

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

nu este funcție polinominală; în acest caz este consacrată următoarea terminologie:

VII.4.0.1.2. *Definiție.* Fie $f, g:R \to R$ două polinoame. Funcția $h:R - \{x \mid g(x) = 0\} \to R$ definită prin:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

se numește *funcție rațională.*

VII.4.0.2. *Metoda coeficicnților nedeterminați.* În unele cazuri, pentru determinarea cîtului și restului împărțirii a două polinoame, se folosește metoda coeficienților nedeterminați.

De exemplu, să arătăm că polinomul $A:R \to R$, definit prin:

$$A(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$$

se divide prin polinomul $B:R \to R$ definit prin:

$$B(x) = (x - 1)^3.$$

Fie:

$$A(x) = B(x)G(x) + H(x),$$

$H(x) = mx^2 + px + q$, $m, p, q \in R$ iar $G:R \to R$ este un polinom de gradul $2n - 3$ definit prin:

$$G(x) = x^{2n-3} + a_1x^{2n-4} + a_2x^{2n-5} + \ldots + a_{2n-4}x + a_{2n-3}.$$

Efectuînd înmulțirile, ordonînd polinomul astfel obținut după puterile lui x și punînd condiția ca cele două polinoame să fie identice, obținem, un sistem care se rezolvă prin metodele clasice.

În cazul particular $n = 3$ scriem, admițînd că polinomul-rest este identic nul:

$$x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = (x - 1)^3(x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3) =$$
$$= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3) =$$
$$= x^6 + (a_1 - 3)x^5 + (3 - 3a_1 + a_2)x^4 + (3a_1 - 1 -$$
$$- 3a_2 + a_3)x^3 + (3a_2 - a_1 - 3a_3)x^2 + (3a_3 -$$
$$- a_2)x - a_3.$$

Identificînd:

$$a_1 - 3 = 0,$$
$$3 - 3a_1 + a_2 = -3,$$
$$3a_1 - 1 - 3a_2 + a_3 = 0,$$
$$3a_2 - a_1 - 3a_3 = 3,$$
$$3a_3 - a_2 = 0,$$
$$-a_3 = -1,$$

de unde:

$$a_3 = 1,$$
$$a_2 = 3,$$
$$a_1 = 3,$$

deci:

$$G(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3.$$

Verificarea este imediată.

Altfel, potrivit algoritmului împărțirii:

$$A(x) = B(x)G(x) + R(x),$$

unde $R(x)$ este restul împărțirii lui $A(x)$ prin $B(x)$, iar $G(x)$ este cîtul acestei împărțiri. Dar grad $R <$ grad B deci $R(x)$ este de forma:

$$R(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Transcriind relația, obținem:

$$x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = (x - 1)^3G(x) + a_1x^2 +$$
$$+ a_2x + a_3. \qquad (2)$$

Pentru $x = 1$:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Derivînd în relația (2):

$$6x^5 - 12x^3 + 6x = (x-1)^3 G'(x) + 3(x-1)^2 G(x) + \\ + 2a_1 x + a_2 \qquad (3)$$

de unde, făcînd din nou $x = 1$:

$$2a_1 + a_2 = 0.$$

În fine, derivînd din nou în (3) și făcînd $x = 1$ obținem:

$$2a_1 = 0.$$

De aici $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, ceea ce dovedește că $A(x)$ este divizibil prin $B(x)$.

VII.4.0.3. *Teorema lui Bézout.* Restul împărțirii polinomului $P(x)$ prin $ax + b$, $a \neq 0$, este $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

VII.4.0.3.1. *Exemplu.* Dacă:

$$P(x) = x^3 + 2x + 1,$$

atunci restul împărțirii acestui polinom prin $x + 1$ este:

$$P(-1) = (-1)^3 + 2(-1) + 1 = -1 - 2 + 1 = -2.$$

VII.4.0.4. *Schema lui Horner.* Fie:

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 3.$$

Restul împărțirii acestui polinom prin binomul $x - 1$ este dat de schema:

	x^4	x^3	x^2	x	x^0	R	$x = 1$
	1	0	−3	2	−3		
		1	1	−2	0	−3	

Deci: se scriu coeficienții tuturor termenilor; coeficientul lui x^4 se transcrie sub coeficientul lui x^3; se înmulțește acest coeficient cu rădăcina 1 (a binomului) și se adună cu coeficientul lui x^3, rezultatul astfel obținut transcriindu-se sub coeficientul lui x^2. Se înmulțește acest rezultat obținut cu rădăcina binomului și se adună cu coeficientul din aceeași coloană (al lui x^2)

iar rezultatul se trece în coloana următoare și așa mai departe (algoritmul este valabil pentru orice polinom și orice binom al cărui grad este 1). Ultimul rezultat reprezintă restul căutat (și se trece în coloana R). În felul acesta:

$$x^4 - 3x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x^3 + x^2 - 2x) - 3$$

(coeficienții 1, 1, —2, 0 sînt ai cîtului).

VII.4.0.5. Un polinom se poate scrie sub forma de produs de factori ireductibili dacă se cunosc rădăcinile sale.

În felul acesta:

$$P(x) = (2x + 1)^2(x - 1)(x + 1) = 4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1.$$

Valorile pentru care polinomul are valoarea zero sînt:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Dacă ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x = x_0$ a polinomului P este m atunci:

$$P(x_0) = 0;\ P'(x_0) = 0, \ldots, P^{(m-1)}(x_0) = 0,\ P^{(m)}(x_0) \neq 0.$$

Invers, dacă:

$$P(x_0) = P'(x_0) = P''(x_0) = \ldots = P^{(k)}(x_0) = 0$$

și:

$$P^{(k+1)}(x_0) \neq 0,$$

atunci:

$$P(x) \vdots (x - x_0)^{k+1}.$$

VII.4.1.0. *Ecuații algebrice.* O ecuație algebrică are forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (4)$$

unde a_i, $i = \overline{0, n}$, sînt coeficienți reali sau complecși, iar x necunoscuta. În plus, $a_0 \neq 0$.

Are loc, în acest caz, următoarea:

VII.4.1.0.1. *Teoremă (d'Alembert).* Orice ecuație de tipul (4) are n rădăcini, reale sau complexe.

VII.4.1.1. *Ecuații cu coeficienți reali.* Dacă o ecuație de tipul (4) cu coeficienți reali admite o rădăcină complexă $a + ib$, $b \neq 0$, atunci ea admite drept rădăcină și conjugata acesteia, $a - ib$.

Numărul rădăcinilor complexe dar nu reale (de forma $a + ib$, $b \neq 0$) ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali este par. De aici rezultă:

VII.4.1.1.1. *Consecință.* Orice ecuație algebrică de grad impar cu coeficienți reali admite cel puțin o rădăcină reală.

VII.4.1.1.2. *Consecință.* Dacă o ecuație algebrică de grad par cu coeficienți reali admite rădăcini reale atunci numărul acestora este par.

VII.4.1.1.3. *Consecință.* Dacă o ecuație algebrică de grad par are termenul liber de semn contrar termenului de grad maxim (pe exemplul ecuației (4) acest lucru se scrie $a_0 a_n < 0$) și toți coeficienții sînt reali atunci ea admite cel puțin două rădăcini reale de semn contrar.

VII.4.1.1.4. *Ecuații cu coeficienți rationali.* Fie:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

o ecuație algebrică în care toți coeficienții sînt rationali. Dacă ecuația admite o rădăcină irațională pătratică $m + n\sqrt{a}$, $a, m, n \in Q$, $a > 0$, $a \neq k^2$, $k \in Q$, atunci ea admite ca rădăcină și conjugata acesteia, $m - n\sqrt{a}$.

VII.4.1.1.5. *Relațiile lui Vieta.* Între rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale ecuației algebrice:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

și coeficienții a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n (reali sau complecși) există relațiile:

$$\sum x_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0} \qquad (1)$$

$$\sum x_1 x_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0} \qquad (2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum x_1 \ldots x_k = x_1 x_2 \ldots x_k + \ldots = (-1)^k \frac{a_k}{a_0} \qquad (k)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}. \qquad (n)$$

VII.4.1.1.6. *Algoritmul lui Euclid.* Polinoamele:

$$P_1(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

$$P_2(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m$$

($m \geqslant n$) pot admite drept divizori comuni polinoame de grad $\geqslant 1$, sau, în caz contrar, sînt *prime între ele*. Pentru a stabili acest fapt se folosește algoritmul lui *Euclid* ce constă din următoarele etape (pe un caz particular):

a°). Se împarte $P_2(x)$ la $P_1(x)$, interesînd numai restul:

$$\begin{array}{l|l} P_2(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9 & x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3 = P_1(x) \\ \underline{-x^5 + x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3x} & \overline{x - 1} \\ -x^4 - x^3 + 12x^2 + 3x - 9 & \\ \underline{x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3} & \\ -2x^3 + 8x^2 - 2x - 12 & \end{array}$$

b°). Se împarte $P_1(x)$ la $R_1(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = -\frac{1}{2}(-2x^3 + 8x^2 - 2x - 12)$

(am înmulțit aici cu $-1/2$ pentru ușurința calculelor):

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3 & x^3 - 4x^2 + x + 6 \\ \hline -x^4 + 4x^3 - x^2 - 6x & x + 3 \\ \hline 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3 & \\ -3x^3 + 12x^2 - 3x - 18 & \\ \hline 7x^2 - 14x - 21 & \end{array}$$

c°). Se împarte $R_1(x)$ la $R_2(x) = x^2 - 2x - 3 = \frac{1}{7}(7x^2 - 14x - 21)$ adică:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + x + 6 & x^2 - 2x - 3 \\ \hline -x^3 + 2x^2 + 3x & x - 2 \\ \hline -2x^2 + 4x + 6 & \\ +2x^2 - 4x - 6 & \\ \hline = \quad = \quad = & \end{array}$$

Împărțirile succesive au condus la restul zero. Polinomul împărțitor de la ultima împărțire este deci divizorul comun. Rădăcinile ecuației $P(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$, adică $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ sînt rădăcinile comune pentru ecuațiile $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$.

VII.4.1.1.7. Putem deci considera o primă problemă: să se formuleze o condiție pentru ca ecuațiile:

$$\begin{aligned} a_1x^2 + b_1x + c_1 &= 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 &= 0, \end{aligned} \qquad a_1,\ a_2 \neq 0,$$

să admită o rădăcină comună.

Soluție. Fie x_1 o rădăcină comună. Înmulțind prima ecuație cu a_2 și a doua cu $-a_1$, obținem:

$$\begin{aligned} a_1a_2x_1^2 + a_2b_1x_1 + a_2c_1 &= 0 \\ -a_1a_2x_1^2 - a_1b_2x_1 - a_1c_2 &= 0 \end{aligned}$$

sau, adunînd:

$$(a_2b_1 - a_1b_2)x_1 = a_1c_2 - a_2c_1$$

de unde:

$$x_1 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

Înlocuind în prima ecuație, găsim:

$$a_1 \cdot \left(\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2 + b_1 \cdot \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} + c_1 = 0$$

de unde:

$$a_1(a_2c_1 - a_1c_2)^2 + b_1(a_2c_1 - a_1c_2)(a_1b_2 - a_2b_1) + c_1(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 0.$$

O primă constatare arată că $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$ adică:

$$\det \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} \neq 0.$$

VII.4.1.1.8. Condiția necesară ca ecuația:

$$x^3 + px + q = 0,\ p,\ q \in R,$$

să aibă o rădăcină reală dublă este:

$$4p^3 + 27q^2 = 0$$

ceea ce arată că $p \leqslant 0$.

VII.4.1.1.9. *Transformarea ecuațiilor.* Fie ecuația algebrică:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

1°). Ecuația:

$$f(x + h) = 0$$

are rădăcinile cu h unități mai mici decît rădăcinile corespunzătoare ecuației $f(x) = 0$.

2°). Ecuația:

$$f(x - h) = 0$$

are rădăcinile cu h unități mai mari decît rădăcinile corespunzătoare ecuației $f(x) = 0$.

3°). Ecuația:

$$f\left(\frac{x}{k}\right) = 0, \quad k \neq 0$$

are rădăcinile de k ori mai mari decît rădăcinile corespunzătoare ecuației $f(x) = 0$.

4°). Ecuația:

$$f(kx) = 0, \quad k \neq 0$$

are rădăcinile de k ori mai mici decît rădăcinile corespunzătoare ecuației $f(x) = 0$.

VII.4.1.1.10. *Separarea rădăcinilor ecuațiilor cu coeficienți numerici.*

VII.4.1.1.10.1. *Teorema lui Descartes.* Fie f un polinom:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

Se numește *variație de semn* o alăturare de doi termeni cu coeficienți de semn contrar. Fie de exemplu:

$$f(x) = \underline{2x^5 - 7x^4} + \underline{8x^3 + 9x^2 - 4x} - 3.$$

În acest caz sînt trei variații.

Atunci numărul p al rădăcinilor pozitive ale ecuației $f(x) = 0$ nu întrece numărul v al variațiilor polinomului f.

VII.4.1.1.10.2. *Teorema lui Rolle.* Dacă f este un polinom definit pe intervalul (a, b), $a < b$, și dacă $f(a) = f(b)$ atunci ecuația:

$$f'(x) = 0$$

are cel puțin o rădăcină reală cuprinsă între a și b.

Drept consecință, dacă f este un polinom cu coeficienți reali, raportul f'/f trece de la semnul — la semnul + cînd variabila trece peste o rădăcină a polinomului.

PROBLEME REZOLVATE

VII.R.17. Să se determine p, q, $m \in R$ astfel încît:

$$P(x) = x^4 + px^2 + q$$

să fie divizibil prin:

$$I(x) = x^2 + mx + 1.$$

Soluție. Fie:

$$Q(x) = x^2 + ax + b$$

cîtul celor două polinoame. Putem scrie:

$$(x^2 + mx + 1)(x^2 + ax + b) = x^4 + px^2 + q,$$

pentru orice $x \in R$ sau, altfel scris:

$$x^4 + (a + m)x^3 + (1 + am + b)x^2 + (a + mb)x + \\ + b = x^4 + px^2 + q.$$

Punînd condiția ca aceste polinoame ce formează membrii egalității anterioare să fie identice, obținem:

$$\begin{aligned} a + m &= 0 \\ 1 + am + b &= p \\ a + bm &= 0 \\ b &= q. \end{aligned}$$

De aici:

$$\begin{aligned} q &= \alpha \\ m &= 0 \\ a &= 0 \qquad\qquad \alpha \in R \\ p &= b + 1 = \alpha + 1 \\ b &= \alpha, \end{aligned}$$

sau:

$$\begin{aligned} b &= 1 \\ q &= 1 \\ a &= \alpha \qquad\qquad \alpha \in R. \\ m &= -\alpha \\ p &= 2 - \alpha^2, \end{aligned}$$

VII.R.18. Să se arate că polinomul $P:R \to R$, definit de:

$P(x) = x^{2n+1} - (2n + 1)x^{n+1} + (2n + 1)x^n - 1$, $n \geqslant 1$,

admite pe 1 drept rădăcină triplă.

Soluție. Pentru $n = 1$ afirmația este adevărată. Fie deci $n \geqslant 2$. Evident $P(1) = 0$. Putem scrie în continuare:

$$P'(x) = (2n + 1)x^{2n} - (2n + 1)(n + 1)x^n + \\ + n(2n + 1)x^{n-1}$$

și:

$$P''(x) = 2n(2n + 1)x^{2n-1} - n(2n + 1)(n + 1)x^{n-1} + \\ + n(n - 1)(2n + 1)x^{n-2}.$$

Prin calcul se constată că $P'(1) = P''(1) = 0$ ceea ce dovedește că $P(x) \vdots (x - 1)^3$.

VII.R.19. Să se arate că polinomul:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

este divizibil prin $(x - 1)^{k+1}$ dacă și numai dacă:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0 \\ &a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = 0 \\ &a_1 + 2^2a_2 + \ldots + n^2a_n = 0 \qquad k \in N^*. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_1 + 2^ka_2 + \ldots + n^ka_n = 0. \end{aligned}$$

Soluție. Să presupunem că $f(x) \vdots (x - 1)^{k+1}$. Aceasta înseamnă $f(1) = f'(1) = \ldots = f^{(k)}(1) = 0$. Condiția $f(1) = 0$ se transcrie:

$$f(1) = a_0 + \ldots + a_n = 0.$$

Dar:

$$f'(x) = a_0nx^{n-1} + \ldots + a_{n-1}$$

de unde:

$$f'(1) = a_0n + a_1(n - 1) + \ldots + a_{n-1} \cdot 1 = n(a_0 + a_1 + \\ + \ldots + a_n) - (a_1 + 2a_2 + \ldots + (n - 1)a_{n-1} + na_n) = 0$$

și, de aici:

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + (n - 1)a_{n-1} + na_n = 0.$$

În continuare:

$$f''(x) = (n-1)na_0x^{n-2} + (n-2)(n-1)a_1x^{n-3} + \\ + \ldots + a_{n-2}$$

de unde:

$$f''(1) = (n-1)na_0 + (n-2)(n-1)a_1 + \ldots + \\ + a_{n-2} = 0$$

şi, de aici, făcînd calcule şi ţinînd seama de relaţiile anterioare:

$$a_1 + 2^2a_2 + \ldots + n^2a_n = 0$$

şi aşa mai departe.

Reciproca se dovedeşte raţionînd analog.

VII.R.20. Să se scrie sub formă de produs polinomul:

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Soluţie. Se constată că $p(1) = 0$ deci $p(x)$ este divizibil prin $x - 1$. Efectuînd împărţirea, obţinem cîtul $q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ deci:

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

VII.R.21. Să se construiască polinomul de grad minim cu coeficienţi *reali* care să admită ca rădăcini, numerele:

$$1,\ 2,\ 3,\quad 1+i.$$

Soluţie. Deoarece $1+i$ este număr complex (dar nu real) iar coeficienţii polinomului sînt reali atunci este clar că polinomul admite şi rădăcina $1-i$. Deci polinomul cerut este:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-1-i)(x-1+i) = \\ = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)(x^2 - 2x + 2) = \\ = x^5 - 8x^4 + 25x^3 - 40x^2 + 34x - 12.$$

VII.R.22. Să se formeze ecuația de gradul al patrulea ale cărei rădăcini sînt:

$$t,\ \frac{1}{t},\ -t,\ -\frac{1}{t},\quad t \in R - \{0\}.$$

Soluție. Scriind ecuația sub forma:

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

și notînd $x_1 = t,\ x_2 = \frac{1}{t},\ x_3 = -t,\ x_4 = -\frac{1}{t}$, obținem:

$$-a_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_2x_4 = -\frac{t^4 + 1}{t^2},$$

$$-a_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 = x_1x_2x_3x_4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) = 0,$$

$$a_4 = x_1x_2x_3x_4 = 1$$

deci ecuația este:

$$x^4 - \frac{t^4 + 1}{t^2}x^2 + 1 = 0$$

sau:

$$t^2x^4 - (t^4 + 1)x^2 + t^2 = 0^1.$$

VII.R.23. Se consideră ecuația:

$$x^3 + x + 1 = 0.$$

Să se calculeze:

$$S_{11} = x_1^{11} + x_2^{11} + x_3^{11},$$

x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației.

Soluție. Fie:

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n,\quad n \in N^*.$$

[1] Ecuația se poate obține și scriind $(x - t)(tx - 1)(x + t)(tx + 1) = 0$.

Pe de altă parte:

$$x_i^3 + x_i + 1 = 0, \quad (\forall)\ i \in \overline{1, 3}$$

deci, oricare ar fi $n \in N^*$:

$$x_i^{n+3} + x_i^{n+1} + x_i^n = 0, \quad (\forall)\ i \in \overline{1, 3}$$

și, de aici:

$$S_{n+3} + S_{n+1} + S_n = 0, \quad (\forall)\ n \in N^*.$$

Dar, conform cu relațiile lui *Vieta*:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2\sum x_1 x_2 = -2,$$

$$S_0 = 1 + 1 + 1 = 3,$$

deci:

$$\begin{aligned}
S_3 &= -S_1 - S_0 = -3,\\
S_4 &= -S_2 - S_1 = 2,\\
S_5 &= -S_3 - S_2 = 5,\\
S_6 &= -S_4 - S_3 = 1,\\
S_7 &= -S_5 - S_4 = -7,\\
S_8 &= -S_6 - S_5 = -6,\\
S_9 &= -S_7 - S_6 = 6,\\
S_{10} &= -S_8 - S_7 = 13\\
S_{11} &= -S_9 - S_8 = 0
\end{aligned}$$

deci:

$$x_1^{11} + x_2^{11} + x_3^{11} = 0.$$

Sau:

$$x^3 = -x - 1,$$

$$x^9 = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = -x^3 - x - 1 - 3x^2 - 2x = -3x^2 - 2x,$$

deoarece $x^3 + x + 1 = 0$;

$$x^{11} = x^2(-3x^2 - 2x) = -3x^4 - 2x^3.$$

Dar $x^3 = -x - 1$ deci:

$$x^{11} = -3x(-x-1) - 2(-x-1) = 3x^2 + 3x + 2x + 2 = 3x^2 + 5x + 2$$

şi deci:

$$x_i^{11} = 3x_i^2 + 5x_i + 2$$

astfel că:

$$S_{11} = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 5(x_1 + x_2 + x_3) + 2 \cdot 3 = 3[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)] + 5(x_1 + x_2 + x_3) + 2 \cdot 3 = -6 + 6 = 0.$$

VII.R.24. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^3 - 14x^2 - 84x + m = 0, \qquad m \in R,$$

ştiind că rădăcinile ei, x_1, x_2, x_3, sînt în progresie geometrică (şi că sînt reale).

Soluţie. Condiţia se scrie:

$$x_1x_3 = x_2^2 \tag{*}$$

şi conform relaţiilor lui *Vieta*:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \tag{1}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -84 \tag{2}$$

$$x_1x_2x_3 = -m. \tag{3}$$

Folosind (2) şi (*) obţinem:

$$x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_3 = -84$$

adică:

$$x_2(x_1 + x_2 + x_3) = -84$$

şi, ţinînd seama de (1), rezultă:

$$x_2 = \frac{-84}{x_1 + x_2 + x_3} = -\frac{84}{14} = -6.$$

Punînd condiţia ca x_2 să verifice ecuaţia:

$$(-6)^3 - 14(-6)^2 - 84(-6) + m = 0$$

găsim $m = 216$.

Aşadar, fie împărţind ambii membri ai ecuaţiei cu $x + 6$ fie folosind relaţiile lui *Vieta*, obţinem:

$$x_1 = 2, \; x_3 = 18, \text{ respectiv } x_1 = 18, \; x_3 = 2.$$

Rația progresiei este -3 respectiv $-\frac{1}{3}$.

Altfel: rădăcinile ecuației sînt:

$$x_1 = \frac{a}{b}, \quad x_2 = a, \quad x_3 = a \cdot b$$

(progresie geometrică), $b \neq 0$, și deci:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + a + ab = 14, & (1) \\ \frac{a}{b} \cdot a + \frac{a}{b} \cdot ab + a \cdot ab = -84, & (2) \\ \frac{a}{b} \cdot a \cdot ab = -m. & (3) \end{cases}$$

Înmulțind (1) cu a și comparînd cu (2) se obține $a = -6$. Din (3) rezultă $m = -a^3 = 216$. Revenind la (1) se obține:

$$b_1 = -3; \quad b_2 = -\frac{1}{3}.$$

Rădăcinile ecuației, în cazul $m = 216$, sînt:

$$x_1 = 2, \; x_2 = -6, \; x_3 = 18$$

sau:

$$x_1 = 18, \; x_2 = -6, \; x_3 = 2.$$

care, în fond, nu este distinctă de cea anterioară.

VII.R.25. Să se discute rădăcinile ecuației:

$$3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + m = 0$$

în funcție de valorile parametrului real m.

Soluție. Fie:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + m$$

Atunci:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 48x + 48 = \\ = 12(x - 2)\ (x + 2)(x - 1).$$

Alcătuim tabelul:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	Concluzii
$f(x)$ / m	$+\infty$	$m-112$	$m+23$	$m+16$	$+\infty$	
$m<-23$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1\in(-\infty,\ -2)$, $x_2\in(2,\ \infty)$, x_3 și x_4 sînt complexe nereale.
$m=-23$	$+$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1=x_2=1$, $x_3\in(-\infty,\ -2)$, $x_4\in(2,\ \infty)$.
$-23<m<-16$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1\in(-\infty,\ -2)$, $x_2\in(-2,\ 1)$, $x_3\in(1,\ 2)$, $x_4\in(2,\ \infty)$.
$m=-16$	$+$	$-$	$+$	0	$+$	$x_1=x_2=2$, $x_3\in(-\infty,\ -2)$, $x_4\in(-2,\ 1)$.
$-16<m<112$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	Ecuația are două rădăcini reale $x_1\in(-\infty,\ -2)$, $x\in(-2,\ 1)$.
$m=112$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$x_1=x_2=-2$, x_3 și x_4 sînt complexe nereale.
$m>112$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	Ecuația nu are nici o rădăcină reală.

Discuția se poate face și în felul următor: se trasează curba de ecuație $y = -3x^4 + 4x^3 + 24x^2 - 48x$ și se studiază numărul punctelor de intersecție ale acesteia cu dreapta variabilă $y = m$.

VII.R.26. Dacă un polinom de gradul n, $x \to P(x)$, și toate derivatele sale pînă la ordinul n inclusiv ($n \in N^*$) sînt strict pozitive pentru $x = a$ atunci pentru orice număr $b > a$, $P(b) > 0$.

Soluție. Potrivit formulei lui *Taylor*:

$$P(a+h) = P(a) + \frac{h}{1!} P'(a) + \frac{h^2}{2!} P''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} P^{(n)}(a)$$

și făcînd $h = b - a > 0$, rezultă afirmația.

VII.R.27. Să se scrie fracția:

$$F(x) = \frac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}$$

sub forma unei sume de fracții ireductibile.

Soluție. Fie:

$$\frac{3+x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x + A - C}{(x-1)(x^2+1)}$$

de unde, prin identificare:

$$A + B = 0, \quad C - B = 1, \quad A - C = 3,$$

deci:

$$A = 2, \quad B = -2, \quad C = -1.$$

Verificare:

$$\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{2x^2 + 2 - 2x^2 + 2x - x + 1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}.$$

VII.T.17. Se consideră polinomul:

$$P(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \ \dots \ (a_nx + b_n)$$

unde n este par, $a_i < 0$, $b_i > 0$, $(\forall)\ i \in \overline{1, n}$.

Să se precizeze dacă coeficientul termenului de gradul al doilea este:

a°). strict pozitiv; b°). strict negativ; c°). egal cu zero.

VII.T.18. Se consideră ecuațiile:

$$x^3 + 1 = 0$$

și:

$$x^6 - 1 = 0.$$

Numărul maximal al rădăcinilor comune acestor ecuații este:

a°). 1; b°). 2; c°). 3; d°). 0.

VII.T.19. Are ecuația:

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

rădăcini reale?

a°). Da; b°). Nu.

VII.T.20. Fără a efectua produsul:

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 3)(x-3)$$

să se precizeze dacă numărul termenilor cu coeficienți strict pozitivi este egal cu:

a°). patru; b°). trei; c°). doi; d°). unu; e°). zero.

VII.T.21. Se consideră polinomul:

$$P(x) = (x^2 + x + 1)^n + (x^2 + x + 1)^{n-1} + \dots + (x^2 + x + 1) - n, \ n \in N^*.$$

Să se precizeze dacă polinomul este divizibil prin:

a°). x; b°). $x + 1$; c°). $x - 1$.

VII.T.22. Gradul minim al polinomului cu coeficienți reali care are printre rădăcini numerele:

$$i,\ 2i,\ 3i$$

este:

a°). trei; b°). cinci; c°). șase.

VII.T.23. Rădăcinile reale ale ecuației:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

sînt în număr de:

a°). 1; b°). 2; c°). 3.

VII.T.24. Ecuația:

$$C_{x+1}^{x} - C_{x+1}^{x-1} = C_{x}^{x-1}$$

are:

a°). un număr finit de rădăcini;
b°). un număr infinit de rădăcini,
c°). rădăcina $x = -2$.

VII.T.25. Se consideră ecuația:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = 0$$

Toate rădăcinile reale ale ei sînt:
a°). a_1; b°). a_1, a_2; c°). a_1, a_2, a_3; d°). a_1, a_3.

VII.T.26. Se consideră polinomul:

$$P(x) = x^{n+1} - (n+1)x + n,\ n \in N^*.$$

Să se precizeze dacă:
a°). $P(x) \vdots (x-1)$;
b°). $P(x) \vdots (x-1)^2$;
c°). $P(x) \vdots (x-1)^3$.

VII.T.27. Să se precizeze dacă polinomul:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

poate fi determinat în condiția:

$$P(1). + P(2) + \ldots + P(n) = n^4, \ (\forall)\ n \in N^*.$$

a°). Da;
b°). Nu.

RĂSPUNSURI

VII.T.17. Polinomul se poate însă scrie:

$$P(x) = a_1 a_2 \ldots a_n (x - k_1) \ldots (x - k_n)$$

unde:

$$k_i = -\frac{b_i}{a_i} > 0 \text{ (deoarece } a_i < 0,\ b_i > 0).$$

Fie, de asemenea:

$$P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n$$

forma canonică a polinomului P, unde:

$$A_i = (-1)^i A_0 \sum k_1 \ldots, k_i, \quad A_0 = a_1 \ldots a_n.$$

Coeficientul care ne interesează este A_{n-2}, adică:

$$(-1)^{n-2} a_1 \ldots a_n \sum k_1 \ldots k_{n-2}.$$

Dar $\sum k_1 \ldots k_{n-2} > 0$ (deoarece $k_i > 0\ (\forall)\ i \in \overline{1, n}$) și cum $a_i < 0$ rezultă că $a_1 \ldots a_n$ are semnul egal cu semnul lui $(-1)^n$ deci semnul lui A_{n-2} este dat de $(-1)^{n-2} \cdot (-1)^n = (-1)^{2n-2} = 1$, adică $+$.

Deci a°).

VII.T.18. c°); $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$.

VII.T.19. b°);

$(x^4 + x^2 + 1) = (x^2 - x + 1)\ (x^2 + x + 1) = 0$.

VII.T.20. Se raționează ca la VII.T.17. Obținem varianta c°).

VII.T.21. Evident:

$$P(0) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ ori}} - n = 0$$

deci $P(x) \vdots x$ și deci varianta a°) este adevărată.

De asemenea, pentru motive analoage, și varianta b°) este corectă.

Varianta c°) nu este niciodată adevărată deoarece ecuația:

$$3^{n+1} - 2n - 1 = 0$$

nu are soluții în numere naturale.

VII.T.22. c°).

VII.T.23. c°); $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$.

VII.T.24. a°), anume $x = 1$.

VII.T.25. c°).

VII.T.26. Numai variantele a°), b°) sînt corecte.

VII.T.27. a°). Se ajunge la o ecuație de gradul 3 în n.

PROBLEME PROPUSE

VII.P.34. Să se determine $a, b, c \in R$ astfel încît polinomul $P : R \to R$ definit prin:

$$P(x) = abx^2 + (a + b)x + a^2 + b^2 - 12x^2 + (c - 12)x - c^2$$

să fie identic nul.

VII.P.35. Se cer valorile lui m pentru care fracția:

$$F(x) = \frac{x^3 - (m+4)x^2 + 3(m+1)x - 1}{(m-4)x^3 + 3(6-m)x^2 - 18x + 4 - m}$$

are aceeași valoare, oricare ar fi $x \in R$.

VII.P.36. Să se determine $a, b, c \in R$ astfel ca expresia:

$$a(x^3 + 2x) + b(x^3 + 4x - 1) + c(x^3 + 2x^2 + 2)$$

să fie cubul unui binom.

VII.P.37. Se consideră un polinom $P_n(x)$ de grad n. Se cere să se precizeze gradul polinomului:

$$S(x) = P_n(x+2) - 2P_n(x+1) + P_n(x)$$

și să se determine $n = \text{grad } P_n(x)$ astfel încît:

$$S(x) = x^2 + x + 1.$$

VII.P.38. Să se determine a, b, c astfel ca polinomul:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

împărțit prin $x + \frac{1}{2}$ să dea restul 1 și:

$$\frac{1}{P(1)+2} = \frac{2}{P(2)+3} = \frac{-3}{P(3)+4}.$$

VII.P.39. Să se găsească toate valorile reale ale lui a pentru care polinomul:

$$P(x) = x^4 - (\sin a - \cos a)\,x^3 + (\sin 2a - \cos 2a)x^2 - (\sin 3a - 1)x - 1$$

este divizibil prin $x + 1$.

VII.P.40[1]. Se consideră polinomul:

$$P(x) = \frac{x^n}{n \cdot 1} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)(n-2)} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)(n-3)} + \ldots + \frac{x^2}{2 \cdot 1} - 1.$$

Să se afle cîtul şi respectiv restul împărţirii lui $P(x)$ la $x - 1$.

VII.P.41. Există valori ale lui n, naturale, astfel încît:

$$P(x) = (2x^3 - x^2 + 3x)^{2n+1} + (-x^3 + 4x^2 + 1)^{2n+1}$$

este divizibil prin $(x + 1)^3$?

VII.P.42. Să se arate că dacă:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \qquad a,\ b,\ c \in R,$$

atunci $P[P(x)] - x$ se divide prin $P(x) - x$.

VII.P.43. Să se efectueze împărţirea:

$$[x^4 + 2x^3 + 2x^2 + (1 + i)x + 3 - i]:$$
$$:[x^2 + (1 + i)x + 1 - i].$$

VIII.P.44. Polinomul:

$$P(x) = (2n - 1)x^{2n} + 2nx^{2n-1} + 1, \quad n \in N^*,$$

este divizibil prin $(x + 1)^2$?

VII.P.45. Să se determine $m \in R$ astfel încît polinoamele:

$$x^3 - 3x + m;$$
$$x^3 + 2mx^2 + 5x + m$$

să admită un singur polinom neconstant divizor comun (cu coeficienţi reali sau complecşi).

VII.P.46. Dovediţi că există $m,\ n,\ p \in N$ astfel încît polinomul:

$$x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$$

să fie divizibil cu:

$$x^4 + x^2 + 1.$$

VII.P.47. Să se scrie sub formă de produs de factori liniari polinomul:

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} +$$
$$+ \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

VII.P.48. Știind că $x_1, x_2, ..., x_n$ sînt rădăcinile reale ale polinomului:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n, \qquad a_0, a_1, ..., a_n \in R, \quad a_0 \neq 0,$$

să se determine rădăcinile polinomului:

$$f(a) + f'(a)\frac{x}{1!} + f''(a)\frac{x^2}{2!} + ... + f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!}$$

unde $a \in R$.

VII.P.49. Să se determine suma pătratelor rădăcinilor polinomului:

$$x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$$

în funcție de $a_1, ..., a_n$.

VII.P.50*. Polinomul $P(x)$ cu grad $P(x) \leqslant n-1$ ia valorile $y_1, ..., y_n$ cînd x parcurge mulțimea rădăcinilor de ordin n ale unității. Să se calculeze $P(0)$.

VII.P.51. Să se arate că dacă $x_1, x_2, ..., x_n$ sînt rădăcinile polinomului $f : R \to R$ și sînt diferite între ele și nenule atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^s}{f'(x_i)} = 0, \quad s \in \overline{1, n-2}.$$

VIII.P.52. Să se calculeze suma:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^n}{f'(x_i)^{\frac{s}{2}}}$$

notațiile fiind cele din problema precedentă.

VII.P.53. Să se determine polinomul $f : R \to R$, de grad mai mic sau egal cu $n-1$ care verifică:

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

pentru orice $x \in \{x_1, ..., x_n\}$, $x_i \neq a$, $(\forall)\ i \in \overline{1, n}$.

VII.P.54. Să se arate că dacă un polinom $x \to P(x)$ de grad $k \leqslant n$ are valori întregi pentru $n+1$ valori întregi $m,\ m+1, \ldots, m+n,\ m \in Z$, atunci are valoare întreagă pentru orice $x \in Z$.

VII.P.55. Dacă un polinom $x \to P(x)$ de gradul n are valori întregi pentru $x \in \{0,1,\ 4,\ 9, \ldots, n^2\}$ atunci el are valoare întreagă pentru orice $x = k^2,\ k \in N$.

VII.P.56. Să se scrie sub formă de fracții simple fracția:

$$\frac{n!}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}.$$

(Adrian Negru, rev. "514")

VII.P.57*. Să se scrie sub formă de fracții simple fracția:

$$\frac{1}{\cos(n \arccos x)};\quad n \in N^*.$$

VII.P.58. Chestiune analoagă pentru fracția:

$$\frac{(2n)!}{x(x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-n^2)}.$$

VII.P.59. Fie:

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Determinați sumele:

a°). $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i}$;

b°). $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x-x_i}$;

c°). $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-x_i)^2}$.

VII.P.60. Să se arate că polinomul:

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1,\ a_i \in Z,$$
$$(\forall)\ i \in \overline{1,n},\ a_i = a_j \Rightarrow i = j$$

este ireductibil în $Z[X]$ cu excepția cazurilor:

$$(x-a)(x-a-1)(x-a-2)(x-a-3)+1=$$
$$=[(x-a-1)(x-a-2)-1]^2$$

și:

$$(x-a)(x-a-2)+1=(x-a-1)^2, a\in R.$$

VII.P.61. Să se arate că dacă $f(x)=0$ are rădăcini reale distincte, f fiind un polinom, atunci ecuația:

$$[f'(x)]^2-f(x)f''(x)=0$$

nu are rădăcini reale.

VII.P.62. Să se decidă dacă polinomul:

$$3x^4-12x^3+18x^2-12x+4$$

are sau nu rădăcini reale.

(I. R. Zilișteanu, rev. "51.f")

VII.P.63. Să se stabilească condițiile în care partea reală a rădăcinilor ecuației:

$$x^3+ax^2+bx+c=0, \qquad a,b,c\in R,$$

este negativă.

VII.P.64. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației:

$$(m^2+1)x^3+mx^2+(m^2-1)x+m+2\sqrt{3}=0,$$
$$m\in R,$$

și:

$$a=\operatorname{arctg} x_1,$$
$$b=\operatorname{arctg} x_2,$$
$$c=\operatorname{arctg} x_3.$$

Să se calculeze $\operatorname{tg}(a+b+c)$, în funcție de m. Depinde, în adevăr, această expresie de m?

VII.P.65. Fie a, b, c rădăcinile ecuației:

$$x^3+px^2+qx+r=0.$$

Să se calculeze în funcție de p, q, r expresia:

$$E = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)}.$$

VII.P.66. Să se rezolve ecuația:

$$(1-a)x^4 + ax^3 + (a-10)x^2 + ax + 2a + 9 = 0$$

știind că între rădăcinile sale x_1, x_2, x_3, x_4 există relația:

$$x_1x_2 = x_3x_4.$$

VII.P.67. Să se rezolve ecuația:

$$x^4 - x^3 + ax^2 - (3a+2)x + b = 0, \qquad a, b \in R$$

știind că admite o rădăcină triplă.

VII.P.68. În ecuația:

$$x^3 - 2x - 3 = 0$$

să se facă transformarea:

$$y = 1 - 2x - x^2.$$

VII.P.69. Să se formeze ecuația de gradul al treilea cu rădăcinile:

$$X_1 = \frac{x_2x_3}{x_1}, \quad X_2 = \frac{x_1x_3}{x_2}, \quad X_3 = \frac{x_1x_2}{x_3}$$

unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad d \neq 0.$$

VII.P.70. Să se determine $\lambda, \mu \in Q$ și să se rezolve ecuația:

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4\lambda x + 4\mu = 0$$

știind că ea admite o rădăcină de forma $\alpha + \beta\sqrt{5}$,

$$\alpha, \beta \in Q, \qquad \beta \neq 0.$$

VII.P.71. Să se rezolve ecuația:

$$abcx^3 - (a^2c + ab^2 + bc^2)x^2 + (a^2b + b^2c + c^2a)\,x - abc = 0$$

unde $a, b, c \in R - \{0\}$.

VII.P.72. Să se determine baza sistemului de numerație în care numărul 824 din sistemul zecimal se scrie 3452.

VII.P.73. Suma pătratelor numerelor 1, 2, ..., n este egală cu 385. Se cere n.

INDICAȚII

VII.P.34. Se ordonează polinomul după puterile lui x și se pune condiția ca toți coeficienții săi să fie nuli.

VII.P.35. Se pune condiția de proporționalitate a coeficienților termenilor de același grad.

VII.P.37. Se are în vedere formula lui *Taylor*.

VII.P.38. Se calculează în prealabil $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

VII.P.40[1]. Se folosește formula:

$$\frac{1}{(n-k)(n-k-1)} = \frac{1}{n-k-1} - \frac{1}{n-k},$$

VII.P.44. Se poate scrie:

$$P(x) = (x+1)^2\,Q(x) + ax + b$$

și se determină a și b.

VII.P.46. Se are în vedere că:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

VII.P.48. Se poate folosi formula lui *Taylor.*

VII.P.50*. Rădăcinile de ordin n ale unității sînt:

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}; \qquad k \in \overline{0, n-1}.$$

VII.P.51. Se poate folosi formula lui *Lagrange*:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} \cdot \frac{1}{x - x_i}$$

unde $g(x) = a_0(x - x_i) \ldots (x - x_n)$, $a_0 \in R - \{0\}$, iar f este un polinom însă demonstrați această formulă.

VII.P.56. Se folosește tot formula lui *Lagrange.*

VII.P.57*. Analog cu VII. P. 56.

VII.P.62. Se are în vedere rezultatul din problema VII.P.61.

SOLUȚII

VII.P.34. Polinomul se mai poate scrie:

$$P(x) = (ab - 12)x^2 + (a + b + c - 12)x + a^2 + b^2 - c^2.$$

Pentru ca P să fie identic nul este necesar ca:

$$\begin{aligned} ab - 12 &= 0, \\ a + b + c - 12 &= 0, \\ a^2 + b^2 - c^2 &= 0, \end{aligned}$$

sistem care, rezolvat, conduce la soluțiile (3, 4, 5), (4, 3, 5) și care, în fond, generează același polinom (identic nul).

VII.P.35. Fie:

$$F(x) = \frac{x^3 - (m+4)x^2 + 3(m+1)x - 1}{(m-4)x^3 + 3(6-m)x^2 - 18x + 4 - m} = \frac{1}{t}$$

unde t este o constantă. Egalitatea de mai sus este deci valabilă pentru orice $x \in R$, cu excepția valorilor care anulează numitorul fracției.

Obținem deci:

$$tx^3 - t(m+4)x^2 + 3t(m+1)x - t = (m-4)x^3 + 3(6-m)x^2 - 18x + 4 - m$$

sau:

$$(m-4-t)x^3 + [3(6-m) + t(m+4)]x^2 + [-18 - 3t(m+1)]x + 4 - m + t = 0$$

de unde:

$$\begin{aligned} &m - 4 - t = 0, \\ &3(6-m) + t(m+4) = 0, \\ &18 + 3t(m+1) = 0, \\ &4 - m + t = 0, \end{aligned}$$

cu soluțiile:

1°). $m = 2, \quad t = -2;$
2°). $m = 1, \quad t = -3.$

Altfel:

împărțind numitorul la numărător se obține cîtul $m - 4$ și restul:

$$r(x) = (m^2 - 3m + 2)x^2 - 3(m^2 - 3m + 2)x.$$

Dacă restul este nul, atunci:

$$F(x) = \frac{1}{m-4}.$$

Restul este zero dacă $m \in \{1, 2\}$ și în acest caz:

$$F(x) = -\frac{1}{3} \quad \text{respectiv} \quad F(x) = -\frac{1}{2}.$$

VII.P.36. Fie:

$$a(x^3 + 2x) + b(x^3 + 4x - 1) + c(x^3 + 2x^2 + 2) = (px + q)^3$$

sau, altfel scris:

$$(a + b + c)x^3 + 2cx^2 + (2a + 4b)x + 2c - b = p^3x^3 + 3p^2qx^2 + 3pq^2x + q^3.$$

Identificînd, obținem:

$$\begin{aligned} &a + b + c = p^3, \\ &2c = 3p^2q, \\ &2a + 4b = 3pq^2, \\ &2c - b = q^3, \end{aligned} \qquad \text{sau} \qquad \begin{aligned} &a + b + c = p^3, \\ &0\cdot a + 0\cdot b + 2c = 3p^2q, \\ &2a + 4b + 0\cdot c = 3pq^2, \\ &0\cdot a - b + 2c = q^3. \end{aligned}$$

Sistem care dă, fără a ține seama de a treia egalitate, pe a, b, c în funcție de p și q:

$$a = \frac{2p^3 - 9p^2q + 2q^3}{2},$$

$$b = 3p^2q - q^3,$$

$$c = \frac{3p^2q}{2}$$

și care, introduse în a treia egalitate, dă:

$$2p^3 + 3p^2q - 3pq^2 - 2q^3 = 0. \qquad (1)$$

Dacă admitem $q = 0$ atunci $a = b = c = p = 0$, caz banal, deci fie $q \neq 0$. Împărțind egalitatea (1) cu q^3 se obține:

$$2\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 3\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 3\left(\frac{p}{q}\right) - 2 = 0,$$

$$\left(\frac{p}{q} - 1\right)\left(2\frac{p^2}{q^2} + 5\frac{p}{q} + 2\right) = 0,$$

de unde $p = q$, respectiv $\frac{p}{q} = \frac{-5 + 2}{4} = -\frac{1}{2}$ respectiv:

$$\frac{p}{q} = \frac{-5 - 3}{4} = -2.$$

VII.P.37. Fie:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a_0 \neq 0.$$

Putem scrie:

$$P_n(x+2) - 2P_n(x+1) + P_n(x) = a_0(x+2)^n + a_1(x+2)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x+2) + a_n + a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n - 2a_0(x+1)^n - 2a_1(x+1)^{n-1} - \ldots$$

și, după eliminarea parantezelor, rezultă că polinomul are gradul cel mult egal cu $n-2$.

Altfel, conform formulei lui *Taylor*:

$$P_n(x+2) = P(x) + \frac{2}{1!}P_n'(x) + \frac{2^2}{2!}P_n''(x) + \ldots + \frac{2^n}{n!}P_n^{(n)}(x),$$

$$-2P_n(x+1) = -2P_n(x) - 2\cdot\frac{1}{1!}P_n'(x) - 2\cdot\frac{1}{2!}P_n''(x) - \ldots - 2\cdot\frac{1}{n!}P_{(n)}^n(x),$$

$$P_n(x) = P_n(x)$$

și, adunînd:

$$P_n(x+2) - 2P_n(x+1) + P_n(x) = P_n''(x) + \ldots$$

de unde deducem că $S(x)$ are gradul $n-2$.

Pentru cazul particular, $n-2=2$ deci $n=4$.

VII.P.38. Potrivit enunțului rezultă:

$$+\frac{1}{4}a - \frac{b}{2} + c = 1$$

și:

$$\frac{1}{a+b+c+2} = \frac{2}{4a+2b+c+3} = \frac{-3}{9a+3b+c+4}$$

care se rezolvă potrivit schemelor clasice.

VII.P.39. Din $P(-1) = 0$ rezultă:

$\sin a - \cos a + \sin 2a - \cos 2a + \sin 3a - 1 = 0$

adică o ecuație trigonometrică ce se mai poate scrie:

$\cos a\ (2 \cos a + 1)\ (2 \sin a - 1) = 0$ și deci $a = k\pi +$

$+ \frac{\pi}{2}$ sau $a = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ sau $a = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$.

Verificarea se face pentru fiecare mulțime de soluții.

VII.P.40[1]. Deoarece:

$$\frac{x^k}{k(k-1)} = x^k\left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right]$$

polinomul mai poate fi scris:

$$P(x) = \frac{x^n}{n-1} + \left(\frac{x^{n-1}}{n-2} - \frac{x^{n-1}}{n-1}\right) + \left(\frac{x^{n-2}}{n-3} - \frac{x^{n-2}}{n-2}\right) +$$
$$+ \ldots + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \left(\frac{x^2}{1} - \frac{x^2}{2}\right) - 1.$$

Grupînd convenabil se observă că $P(x)$ se divide la $x - 1$ deci restul este 0. Cîtul este un polinom de gradul $n - 1$ și anume:

$$\frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n-2} + \frac{x^{n-3}}{n-3} + \ldots + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{1} + 1.$$

VII.P.41. *Soluția I.* Succesiv:

$$P(-1) = (-6)^{2n+1} + 6^{2n+1} = 0,$$
$$P'(-1) = 11(2n+1)\ (-6)^{2n} - 11(2n+1) \cdot 6^{2n} = 0,$$
$$P''(-1) = (2n+1)\ [-14(-6)^{2n} + 2n(-6)^{2n-1} \cdot 11^2 +$$
$$+ 14 \cdot 6^{2n} + 2n(6)^{2n-1} \cdot 11^2] = 0$$

fapt ce dovedește că afirmația este valabilă pentru orice $n \in N^*$.

Soluția a II-a. Pentru $x = -1$, expresia $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ are valoarea zero. Presupunînd $(x + 1)^3 = 0$, obținem:

$$P(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 - 4x^2 - 1)^{2n+1} +$$
$$+ (-x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 7x^2 + 3x + 2)^{2n+1} =$$
$$= (x^3 - 4x^2 - 1)^{2n+1} + (7x^2 + 3x + 2)^{2n+1} = (-3x^2 -$$
$$- 3x - 1 - 4x^2 - 1)^{2n+1} + (7x^2 + 3x + 2)^{2n+1} =$$
$$= (-7x^2 - 3x - 2)^{2n+1} + (7x^2 + 3x + 2)^{2n+1} =$$
$$= -(7x^2 + 3x + 2)^{2n+1} + (7x^2 + 3x + 2)^{2n+1} = 0.$$

VII.P.42. Se verifică prin calcule. O cale simplă este următoarea:

dacă $P[P(x)] - x$ se divide prin $P(x) - x$ înseamnă că înlocuind pe x prin $P(x)$ și respectiv $P(x)$ prin x se obține $P[P(x)] - x = P[P(x)] - P(x) = P(x) - P(x) = 0$

Sau: fie $P(x) - x = ax^2 + bx + c - x$. Dacă se înlocuiește $ax^2 + bx$ prin $x - c$ se obține:

$$P[P(x)] - x = a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx +$$
$$+ c) + c - x = a(x - c + c)^2 + b(x - c + c) + c -$$
$$- x = ax^2 + bx + c - x = x - c + c - x = 0.$$

VII.P.43. Cîtul obținut este $x^2 + (1 - i)x + 2 + i$, iar restul zero.

VII.P.44. Succesiv:

$$P(-1) = (2n - 1)(-1)^{2n} + 2n(-1)^{2n-1} + 1 = 0,$$

$$P'(-1) = (2n - 1)2n(-1)^{2n-1} + 2n(2n -$$
$$- 1)(-1)^{2n-2} = -(2n)^2 + 2n + (2n)^2 - 2n = 0$$

deci $P(x) \vdots (x + 1)^2$ oricare ar fi $n \in N^*$.

Pentru a obține cîtul și în același timp pentru a lovedi divizibilitatea, polinomul dat se scrie:

$$P(x) = 2nx^{2n} - x^{2n} + 2nx^{2n-1} + 1 = 2nx^{2n-1}(x + 1) - (x^{2n} - 1) = 2nx^{2n-1}(x + 1) - (x + 1)(x^{2n-1} - x^{2n-2} + x^{2n-3} - \ldots) = (x + 1)(2nx^{2n-1} - \underbrace{x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \ldots + 1}_{2n \text{ termeni}}) =$$

$$= (x + 1)(x^{2n-1} - x^{2n-1} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + x^{2n-1} - x^{2n-3} + \ldots + x^{2n-1} + 1) = (x + 1)[x^{2n-2}(x + 1) + x^{2n-3}(x^2 - 1) + x^{2n-4}(x^3 + 1) + x^{2n-5}(x^4 - 1) + \ldots + (x + 1)(x^{2n-2} - x^{2n-3} + x^{2n-4} - \ldots)] =$$

$$= (x + 1)^2[x^{2n-2} + x^{2n-3}(x - 1) + x^{2n-4}(x^2 - x + 1) + \ldots].$$

VII.P.45. Polinoamele pot admite doar un divizor de gradul I, fie acesta $x - a$, deoarece dacă ar admite unul de gradul al doilea, ar admite două de gradul I, contrar ipotezei. În plus, a trebuie să fie real deoarece, în caz contrar, fiecare din polinoamele considerate ar admite drept divizor și polinomul $x - \bar{a}$, contrar ipotezei.

Deci:

$$a^3 - 3a + m = 0,$$

$$a^3 + 2a^2m + 5a + m = 0, \qquad (1)$$

de unde, prin scădere:

$$2a^2m + 8a = 0$$

și, de aici:

$$a_1 = 0,$$

respectiv:

$$a_2m = -4.$$

Pentru $a_1 = 0$ găsim $m_1 = 0$ și polinoamele se reduc la $x^3 - 3x$ și respectiv $x^3 + 5x$ și, în adevăr, singurul divizor comun de tipul cerut este x. În al doilea caz, $a_2 \neq 0$ deci, din egalitățile (1):

$$a_2^4 - 3a_2^2 - 4 = 0,$$

care conduce la soluțiile reale $a_2' = 2$, $a_2'' = -2$ deci $m_2' = -2$, $m_2'' = 2$. În primul caz ($m_2' = -2$) polinoamele se scriu:

$$x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x + 1)^2,$$

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(x - 1)^2,$$

și, în adevăr, singurul divizor comun este $x - 2$ iar în cazul al doilea ($m_2'' = 2$) polinoamele se scriu:

$$x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)^2,$$

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 2)(x + 1)^2$$

și, de asemenea, afirmația se verifică.

VII.P.46. Putem alege $m = 3$, $n = 2$, $p = 1$ și obținem:

$$x^9 + x^7 + x^5 = x^5(x^4 + x^2 + 1),$$

fapt ce dovedește afirmația.

Dacă ținem seama că:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = \frac{x^3 + 1}{x + 1} \cdot \frac{x^3 - 1}{x - 1},$$

dacă $P(x) \vdots x^4 + x^2 + 1$, atunci $P(x) \vdots x^2 - x + 1$ și $P(x) \vdots x^2 + x + 1$.

Dacă:

$P(x) \vdots x^2 - x + 1$, atunci fie $x^3 = -1$,

$P(x) \vdots x^2 + x + 1$, atunci fie $x^3 = 1$.

Putem scrie:

$$P(x) = (x^3)^m + (x^3)^n \cdot x + (x^3)^p \cdot x^2 =$$

$$= \begin{cases} (-1)^m + (-1)^n \cdot x + (-1)^p \cdot x^2 = 1 - x + x^2 \\ 1^m + 1^n \cdot x + 1^p \cdot x^2 = 1 + x + x^2, \end{cases}$$

pentru primul caz și al doilea, astfel:

dacă $m, n, p \in N$, $P(x) \vdots\ x^2 + x + 1$

dacă $m, p \in \{2k\}_{k \in N}$, $n \in \{2k+1\}_{k \in N}$ sau $m, p \in \{2k+1\}_{k \in N}$, $n \in \{2k\}_{k \in N}$, $P(x) \vdots\ x^2 - x + 1$.

În concluzie, $P(x) \vdots\ x^4 + x^2 + 1$ pentru:

m, p numere naturale pare, n număr natural impar sau m, p numere naturale impare, n număr par.

VII.P.47. Fie $x = k$, $k \in N$, $i \leqslant k \leqslant n$. Atunci, folosind dezvoltarea binomului după *Newton*:

$$f(k) = (1 - 1)^k = 0.$$

În consecință:

$$f(x) \vdots\ (x - 1)(x - 2) \ldots (x - n).$$

În felul acesta:

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(x - 1)(x - 2) \ldots (x - n).$$

VII.P.48. Folosind formula lui *Taylor:*

$$f(x + a) = f(a) + f'(a)\frac{x}{1!} + f''(a)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!}$$

rezultă că ecuația $f(x + a) = 0$ admite rădăcinile $x_1 - a, \ldots, x_n - a$, $x_1, \ldots, x_n$ fiind rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

VII.P.49. Folosind relațiile lui *Vieta* se poate scrie:

$$\sum x_1 = -a_1$$

$$\sum x_1 x_2 = a_2,$$

$x_1 \ldots, x_n$ fiind rădăcinile polinomului. De aici:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j = a_1^2 - 2a_2.$$

VII.P.50*. Ecuația:

$$x^n = 1$$

are rădăcinile:

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}; \qquad k \in \overline{0,\ n-1}.$$

Se aplică oricare din formulele de interpolare cunoscute și se obține, în final:

$$P(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k.$$

Altfel, fie:

$$P(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Este clar că $P(0) = a_n$. Rădăcinile unității le notăm astfel:

$$x_k = \cos\frac{2(k-1)\pi}{n} + i \sin\frac{2(k-1)\pi}{n}, \quad k \in \overline{1,\ n}.$$

Putem scrie:

$$P(x_1) = a_1 x_1^{n-1} + \ldots + a_n = y_1,$$

$$P(x_2) = a_1 x_2^{n-1} + \ldots + a_n = y_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P(x_n) = a_1 x_n^{n-1} + \ldots + a_n = y_n.$$

Adunînd aceste relații, obținem:

$$a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^{n-1} + a_2 \sum_{k=1}^{n} x_k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \sum_{k=1}^{n} x_k +$$

$$+ n a_n = \sum_{k=1}^{n} y_k,$$

le unde:

$$P(0) = a_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} y_k - a_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^{n-1} - \ldots - a_{n-1} \sum_{k=1}^{n} x_k\right].$$

Pe de altă parte:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^p = \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2(k-1)p\pi}{n} + i \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{2(k-1)p\pi}{n},$$

$$p \in \overline{2, n-1}.$$

Dar:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh) = \frac{\sin n \frac{h}{2}}{1} \cdot \frac{\cos\left[\frac{n-1}{2} h + a\right]}{\sin \frac{h}{2}},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh) = \frac{\sin n \frac{h}{2}}{1} \cdot \frac{\sin\left[\frac{n-1}{2} h + a\right]}{\sin \frac{h}{2}}$$

eci, cum $\sin p\pi = 0$ pentru $p \in Z$, rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^p = 0, \ (\forall) p \in \overline{1, n-1}$$

deci:

$$a_n = P(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k.$$

VII.P.51. Folosm formula lui *Lagrange*:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{g(x_i)}{f'(x_i)\,(x - x_i)}, f(x) = a_0(x - x_1) \ldots (x - x_n$$

$a_0 \neq 0$, g și f fiind polinoame, în care facem $g(x) = x^s$ și $f(x) \neq 0$. Rezultă clar (deoarece $g(0) = 0$):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^s}{f'(x_i)} = 0.$$

VII.P.52. Vezi problema precedentă.

VII.P.53. Se folosesc tot formule de interpolare

VII.P.54. Scriem:

$$P(x) = A_0 + A_1 \frac{x - m}{1} + A_2 \frac{(x - m)\,(x - m - 1)}{1 \cdot 2} +$$

$$+ \ldots + A_n \frac{(x-m)\,(x - m - 1) \ldots (x - m - n - 1)}{n!}.$$

Înlocuind pe x prin m, $m + 1, \ldots, m + n$, se ob ține egalitățile necesare pentru determinarea lui A_0 $A_1, \ldots, A_n$:

$$A_0 = P(m),$$

$$A_k = P(m + k) - A_0 - \ldots$$

de unde rezultă $A_k \in Z$. Pentru valorile întregi al lui x, termenii din expresia anterioară a lui $P(x)$ sîn întregi și în consecință, afirmația este valabilă.

VII.P.55. Polinomul $F(x) = P(x^2)$ de gradul $2n$ are valori întregi pentru $(2n + 1)$ valori ale lui x: $-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n$ și ținînd seama de problema precedentă, admite valori întregi pentru toate valorile întregi ale lui x.

VII.P.56. Folosind formula lui *Lagrange* (vezi VII.P.51) se obține:

$$\frac{n!}{x(x-1)\ldots(x-n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} C_n^k}{x-k}.$$

VII.P.57*. Fie:

$$P(x) = \cos(n \arccos x)$$

și $\arccos x = t$. Așadar:

$$P(\cos t) = \cos nt = \cos^n t - C_n^2 \cos^{n-2} t \sin^2 t + \\ + C_n^4 \cos^{n-4} t \sin^4 t - \ldots$$

sau încă:

$$P(x) = x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots$$

astfel că P este un polinom de gradul n. Coeficientul lui x^n este:

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}.$$

Rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sînt date de:

$$\cos(n \arccos x) = 0$$

adică de:

$$n \arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2}, \quad k \in \overline{1,\ n}$$

deci de:

$$\arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k \in \overline{1,\ n}$$

adică, în fond, sînt:

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{2n},\ x_2 = \cos\frac{3\pi}{2n},\ \ldots,\ x_n = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

În felul acesta:

$$\frac{1}{\cos(n\arccos x)} = \frac{1}{x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}(x-x_1)\ldots(x-x_n)}.$$

Fie:

$$\frac{1}{2^{n-1}(x-x_1)\ldots(x-x_n)} = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}\right],$$

unde:

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},$$

deci:

$$\frac{1}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}.$$

Înmulțind succesiv egalitatea prin $x - x_1, \ldots, x - x_n$ și înlocuind pe x prin $x_1, \ldots, x_n$ se obțin coeficienții $A_k (k \in \overline{1, n})$; în final:

$$\frac{1}{\cos(n\arccos x)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}{x - \cos\frac{2k-1}{2n}\pi}$$

VII.P.58. Folosind tot formula de descompunere a lui *Lagrange* obținem:

$$\frac{(2n)!}{x(x^2-1)\ldots(x^2-n^2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k} C_{2n}^{n+k}}{x-k}.$$

VII.P.59. a°). Se știe că:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}; \qquad (1)$$

unde $f(x) = a_0(x - x_1) \dots (x - x_k)$.

Analog, pentru b°):

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n}$$

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x - x_1} + \frac{x}{x - x_2} + \dots + \frac{x}{x - x_n} =$$

$$= \frac{x - x_1 + x_1}{x - x_1} + \frac{x - x_2 + x_2}{x - x_2} + \dots + \frac{x - x_n + x_n}{x - x_n} =$$

$$= 1 + \frac{x_1}{x - x_1} + 1 + \frac{x_2}{x - x_2} + \dots + 1 + \frac{x_n}{x - x_n}.$$

$\frac{xf'(x)}{f(x)} - n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x - x_i}$ și deci $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x - x_i} = \frac{xf'(x) - nf(x)}{f(x)}$.

c°). $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2} = \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f(x)]^2}$, care se obține derivînd (1).

VII.P.60. Presupunem:

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

unde $\varphi, \psi \in Z[X]$. Atunci $f(a_i) = 1$, $\psi(a_i) = \pm 1$, $\varphi(a_i) = \pm 1$, $i \in \overline{1, n}$ (semnele se corespund).

Dacă φ și ψ nu sînt polinoame constante atunci, este clar că $\varphi \equiv \psi$ și deci:

$$f(x) = [\varphi(x)]^2.$$

Această egalitate nu este posibilă decît pentru n par şi deci, altfel scris:

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) + 1 = [\varphi(x)]^2,$$

cu n par. Admiţînd că:

$$\varphi(x) + 1 = (x - a_1)(x - a_3) \dots (x - a_{n-1}),$$

$$\varphi(x) - 1 = (x - a_2)(x - a_4) \dots (x - a_n),$$

(acest lucru este posibil renumerotînd numerele $a_1, \dots, a_n$) obţinem, scăzînd:

$$(x - a_1)(x - a_3) \dots (x - a_{n-1}) - (x - a_2)(x - a_4) \dots (x - a_n) = 2.$$

Dacă $a_1 > a_3 > \dots > a_{n-1}$ (în funcţie de numerotare), atunci, punînd $x = a_{2k}$, $k \in \overline{1, \frac{n}{2}}$ obţinem:

$$(a_{2k} - a_1)(a_{2k} - a_3) \dots (a_{2k} - a_{n-1}) = 2$$

şi deci numărul 2 se descompune în $\frac{n}{2}$ factori întregi, aşezaţi în ordine descrescătoare. Acest lucru este posibil numai cînd $\frac{n}{2} = 1$ sau $\frac{n}{2} = 2$, posibilităţi menţionate de altfel în enunţ.

VII.P.61. Faptul este evident, avînd în vedere unele din relaţiile obţinute anterior, anume că dacă:

$$f(x) = a_0(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad x_i \neq x_j$$

atunci:

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2} = \frac{f''(x) f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}.$$

şi cum suma nu poate fi zero, rezultă că:

$$[f'(x)]^2 - f(x) f''(x) \neq 0.$$

VII.P.62. Este un caz particular al problemei precedente. Lăsăm pe seama cititorului găsirea lui f.

VII.P.63. Dacă rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației sînt negative atunci:

$$x_1x_2x_3 < 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 < 0,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) > 0$$

deci $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ etc..

VII.P.64. Este clar că:

$$\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{\sum \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \sum \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2x_3}{1 - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)} = \sqrt{3}$$

și de aici, imediat, $a + b + c = k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in Z$.

VII.P.65. Se folosește formula de descompunere a lui *Lagrange* (vezi VII.P.51).

VII.P.66. Ecuația se mai poate scrie:

$$x^4 - 10x^2 + 9 + a(-x^4 + x^3 + x^2 + x + 2) = 0,$$

de unde se vede că ecuațiile:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0,$$

$$-x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0,$$

admit rădăcina comună $x_4 = -1$. Ecuația care dă celelalte trei rădăcini este:

$$(x - 1)(x^2 - 9) + a(-x^3 + 2x^2 - x + 2) = 0,$$

care se coroborează cu relația $x_1x_2 = -x_3$.

Rezolvarea este imediată.

VII.P.67. Fie u rădăcina triplă și v cealaltă rădăcină. Atunci:

$$(x-u)^3(x-v) = x^4 - x^3 + ax^2 - (3a+2)x + b.$$

Folosind metoda identificării coeficienților, ajungem la o ecuație din care rezultă u etc..

VII.P.68. Problema nu cere altceva decît să se obțină o relație în y.

Dacă $x^3 - 2x - 3 = 0$ rezultă $x^3 = 2x + 3$.

Succesiv:

$$y = 1 - 2x - x^2;\ xy = x - 2x^2 - x^3 =$$
$$= -3 - x - 2x^2$$
$$yx^2 = x^2 - 2x^3 - x^4 = x^2 - 2x^3 - x(2x+3) =$$
$$= x^2 - 2(2x+3) - x(2x+3) = -6 - 7x - x^2;$$

se obține:

$$x^2 + 2x + y - 1 = 0 \text{ și } 2x^2 + (1+y)x + 3 = 0.$$

Eliminînd x^2 între aceste două relații rezultă:

$$x = \frac{2y-5}{y-3},\ y = 1 - 2\cdot\frac{2y-5}{y-3} - \left(\frac{2y-5}{y-3}\right)^2.$$

VII.P.69. Așadar:

$$X_i = \frac{x_1x_2x_3}{x_i^2} = \frac{-d}{ax_i^2},\ i \in \overline{1,3}.$$

deci:

$$X_1 + X_2 + X_3 = x_1x_2x_3\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}\right) =$$
$$\frac{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2}{x_1x_2x_3} = \frac{(\sum x_1x_2)^2 - x_1x_2x_3\sum x_1}{x_1x_2x_3}$$

etc., de unde, folosind relațiile lui *Vieta* se obține ecuația cerută.

Condiția $d \neq 0$ arată că orice rădăcină este nenulă.

VII.P.70. Singura observație care trebuie făcută este că și $\alpha - \beta\sqrt{5}$ este de asemenea rădăcină a ecuației considerate.

VII.P.71. Ecuația se mai scrie:

$$x^3 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) x^2 + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}\right) x - 1 = 0,$$

de unde și rădăcinile $x_1 = \frac{a}{b}$; $x_2 = \frac{b}{c}$, $x_3 = \frac{c}{a}$.

VII.P.72. Folosind tranformarea numărului 3452 din baza x, ce trebuie determinată, în baza 10, obținem ecuația:

$$3x^3 + 4x^2 + 5x - 822 = 0,$$

cu rădăcina $x_1 = 6$ care convine deoarece este mai mare decît oricare din cifrele numărului 3452.

VII.P.73. Ecuația cu ajutorul căreia se determină n, este:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 385,$$

deoarece:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

De aici $n = 10$.

ANALIZA MATEMATICĂ

VIII.0. Definiții și propoziții.

VIII.1. *Definiție.* O mulțime A se numește *numărabilă* dacă există o bijecție $f : A \to N^*$.

VIII.2. *Propoziție.* Mulțimea numerelor raționale este numărabilă.

VIII.3. *Propoziție.* Mulțimea numerelor reale nu este numărabilă.

VIII.4. *Definiție.* Fie $A \subseteq R$ o mulțime și $a \in A$. a se numește *punct de acumulare* dacă orice vecinătate V a lui a conține cel puțin un punct al mulțimii A, în afară de punctul a.

VIII.5. *Teoremă* (*Weierstrass-Bolzano*). O mulțime de numere reale mărginită și infinită are cel puțin un punct de acumulare.

VIII.6. *Definiție.* Un punct $x_0 \in A \subseteq R$ se numește *punct interior* al mulțimii A dacă există o vecinătate (a, b) a lui x_0, $(a, b) \subset A$, $a < b$.

VIII.7. *Definiție.* O mulțime de numere reale care are toate punctele sale interioare se numește *mulțime deschisă*.

VIII.8. *Definiție.* Un punct $x_0 \in A \subseteq R$ se numește *punct exterior* al lui A dacă există o vecinătate (a, b), $a < b$, a lui x_0 inclusă în $\complement A$.

VIII.9. *Propoziție.* Mulțimea vidă și mulțimea numerelor reale R sînt mulțimi deschise.

VIII.10. *Definiție.* Fie $A \subseteq R$ o mulțime. Un punct $x_0 \in R$ (nu neapărat din A) se numește *punct aderent* al lui A, dacă orice vecinătate U a lui x_0 conține cel puțin un punct al lui A (dacă $x_0 \in A$, acel punct poate fi numai x_0), deci dacă $U \cap A \neq \phi$.

VIII.11. *Definiție.* O mulțime $A \subseteq R$ care conține toate punctele sale aderente se numește *mulțime închisă.*

VIII.12. *Definiție.* O mulțime $A \subseteq R$ se numește *compactă* dacă este închisă și mărginită.

VIII.13. *Teoremă* (*Borel-Lebesgue*). Dacă $A \subseteq R$ este o mulțime compactă, din orice acoperire a sa cu mulțimi deschise se poate extrage o acoperire finită.

VIII.14. *Definiție.* Se numește *șir* de numere reale orice funcție $f : N^* \to R$ (sau, cîteodată, $f : N \to R$).

VIII.15. *Teoremă.* Orice subșir al unui șir convergent este convergent.

VIII.16. *Teoremă* (*Cesaro*). Orice șir mărginit conține un subșir convergent.

VIII.17. *Teoremă* (*Cauchy*). Un șir de numere reale:

$$a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

este convergent dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in N^*$ astfel încît pentru orice $n > n(\varepsilon)$ și $p \in N^*$:

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

VIII.18. *Teoremă.* Un șir monoton și mărginit este convergent.

VIII.19. *Definiție.* Fie $\{a_i\}_{i \in N^*}$ un șir de numere reale. Un număr a este *punct limită* al șirului $\{a_i\}_{i \in N^*}$ dacă orice vecinătate V a lui a conține cel puțin un termen al șirului, diferit de a (a poate sau nu să aparțină șirului).

Fie K mulțimea punctelor limită ale șirului $\{a_i\}_{i\in N^*}$.

Se numește *limita superioară* a șirului $\{a_i\}_{i\in N^*}$, marginea superioară L a mulțimii K și, în acest caz, notăm:

$$L = \sup K = \limsup a_n = \overline{\lim}\, a_n.$$

Marginea inferioară l a mulțimii K se numește *limita inferioară* a șirului $\{a_n\}_{n\in N^*}$ și se notează:

$$l = \inf K = \liminf a_n = \underline{\lim}\, a_n.$$

VIII.20. *Propoziție.* Un șir $\{a_n\}_{n\in N^*}$ are limită dacă:

$$\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n.$$

VIII.21. *Teoremă* (*O. Stolz — E. Cesaro*). Fie $\{a_n\}_{n\in N^*}$ un șir oarecare și $\{b_n\}_{n\in N^*}$ un șir strict crescător și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Dacă:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

există (finită sau infinită) atunci limita:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

există și are aceeași valoare.

VIII.22. *Teoremă* (*Leibniz*). Fie $u, v: I \subseteq R \to R$ două funcții, derivabile de n ori pe I. Atunci funcția $uv: I \to R$ este de n ori derivabilă și:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

cu convenția $v^{(0)} = v$, $v^{(k)}$ reprezentînd derivata de ordin k a funcției v.

VIII.23. *Teoremă* (*Fermat*). Dacă o funcție $f: I \subseteq R \to R$ are derivată într-un punct $x_0 \in I$ și dacă x_0 este un punct de extrem local pentru funcția f, atunci $f'(x_0) = 0$.

VIII.24. *Propoziție.* Fie $f: I \subseteq R \to R$ o funcție derivabilă pe I.

a°). Dacă f este descrescătoare pe I, atunci derivata sa f' este negativă pe I;

b°). Dacă f este crescătoare pe I, atunci derivata sa f' este pozitivă pe I.

Reciproccle sînt, de asemenea, adevărate.

VIII.25. *Teoremă* (*Rolle*). Fie $f: I \supset [a, b] \to R$. $a < b$.

Dacă:

1°). f este continuă pe $[a, b]$;

2°). f este derivabilă pe (a, b);

3°). $f(a) = f(b)$,

atunci există $c \in (a, b)$ astfel încît $f'(c) = 0$.

VIII.26. *Teoremă* (*Cauchy*). Fie $f, g: I \subseteq R \to R$ și $[a, b] \subset I$, $a < b$. Dacă:

1°). f, g sînt continue pe $[a, b]$;

2°). f, g sînt derivabile pe (a, b);

3°). $g'(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in (a, b)$;

atunci există $c \in (a, b)$ astfel încît:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

VIII.27. *Teoremă* (*Lagrange*). Fie f o funcție definită pe un interval I și $[a, b] \subset I$, $a < b$. Dacă:

1°). f este continuă pe $[a, b]$;

2°). f este derivabilă pe (a, b),

atunci există $c \in (a, b)$ astfel încît:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

VIII.28. *Teoremă* (*l'Hospital*). a°). Fie $f, g: I - \{x_0\} \subset R \to R$ două funcții și x_0 un punct de acumulare, finit sau infinit, al lui I, în care funcțiile f și g pot sau nu să fie definite.

Dacă:

1°). $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$;

2°). f și g sînt derivabile pe $I - \{x_0\}$;

3°). $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$, $x \in I$;

4°). există:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

finită sau infinită, atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

b°). Fie $f, g: I - \{x_0\} \subset R \to R$ două funcții, x_0 fiind un punct de acumulare al lui I. Dacă:

1°). funcția g este strict monotonă atît la dreapta lui x_0 cît și la stînga lui x_0 (deci într-o vecinătate a lui x_0) și $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$,

2°). funcțiile f și g sînt derivabile pe $I - \{x_0\}$,

3°). $g'(x) \neq 0$, pentru orice $x \neq x_0$, $x \in I$,

4°). există:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

finită sau infinită, atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

VIII.29. *Teoremă (Taylor).* Fie $f:[a, b] \to R$ astfel încît:

1°). funcția f și toate derivatele sale pînă la ordinul n sînt continue pe $[a, b]$;

2°). derivata de ordin $n+1$ există în fiecare punct al intervalului (a, b); atunci există $\zeta \in (a, b)$ astfel încît:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \\ + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta).$$

VIII.30. *Teoremă* (criteriul comparației). Fie $\sum u_n$ și $\sum v_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există $n_1 \in N^*$ astfel încît pentru orice $n > n_1$ are loc inegalitatea $u_n \leqslant v_n$ atunci:

1°). Dacă seria $\sum v_n$ este convergentă atunci și seria $\sum u_n$ este convergentă;

2°). Dacă seria $\sum u_n$ este divergentă atunci și seria $\sum v_n$ este divergentă.

VIII.31. *Teoremă* (criteriul rădăcinii sau al lui *Cauchy*).

Fie o serie cu termenii pozitivi $\sum u_n$; dacă există $n_1 \in N^*$ astfel încît pentru orice $n > n_1$ avem $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q < 1$, seria este convergentă, iar dacă $\sqrt[n]{u_n} \geqslant q > 1$, seria este divergentă.

VIII.32. *Teoremă* (criteriul raportului sau al lui *d'Alembert*).

Fie seria cu termenii pozitivi $\sum u_n$; dacă există $n_1 \in N^*$ astfel încît pentru orice $n > n_1$ avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q < 1$, seria este convergentă, iar dacă $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q > 1$, seria este divergentă.

VIII.33. *Teoremă (Kummer)*. Fie seria cu termeni pozitivi $\sum u_n$. Dacă există un șir de numere pozitive $\{a_i\}_{i \in N^*}$ și un număr $n_1 \in N^*$ astfel încît:

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant \lambda > 0, \quad (\forall)\, n > n_1$$

seria este convergentă. Dacă:

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leqslant \lambda < 0, \quad (\forall)\, n > n_1$$

iar seria $\sum \frac{1}{a_n}$ este divergentă atunci seria $\sum u_n$ este divergentă.

VIII.34. *Teoremă (Raabe și Duhamel).* Fie seria cu termeni pozitivi $\sum u_n$. Dacă există un număr $n_1 \in N^*$ astfel încît:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqslant \lambda > 1, \quad (\forall)\, n > n_1,$$

atunci seria este convergentă iar dacă:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leqslant \lambda < 1, \quad (\forall) n > n_1,$$

atunci seria este divergentă.

VIII.35. *Teoremă.* Orice funcție $f:[a, b] \to R$, continuă pe $[a, b]$, este integrabilă *Riemann* pe $[a, b]$.

VIII.36. *Teoremă.* Orice funcție $f:[a, b] \to R$, monotonă pe $[a, b]$, este integrabilă *Riemann* pe $[a, b]$.

VIII.37. *Teoremă.* Dacă $f:[a, b] \to R$ este mărginită și integrabilă *Riemann* atunci:

$$(b - a) \inf_{x \in [a, b]} f(x) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant (b - a) \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

VIII.38. *Teoremă* (formula schimbării de variabilă în integrala definită). Dacă f este continuă pe intervalul $[a, b]$ iar $t \mapsto \varphi(t)$ este o funcție strict monotonă, cu derivata continuă pe $[\alpha, \beta]$ atunci:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt$$

unde $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

VIII.39. *Teoremă* (formula integrării prin părți). Dacă u și v sînt două funcții care au derivate u', v' continue pe un interval $[a, b]$ atunci:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx, \quad (\forall)x \in [a, b].$$

VIII.40. *Teoremă.* Dacă funcțiile u și v au derivate de ordinul n continue pe intervalul I, atunci:

$$\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} + (-1)^1u'v^{(n-2)} + (-1)^2u''v^{(n-3)} +$$
$$+ \ldots + (-1)^ku^{(k)}v^{(n-k-1)} + \ldots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v +$$
$$+ (-1)^n\int u^{(n)}v\,dx.$$

VIII.41. *Teoremă.* Dacă f și g sînt integrabile *Riemann* pe $[a, b]$ și dacă m și M sînt marginile funcției f pe $[a, b]$ și, în fine, dacă $g \geqslant 0$ atunci:

$$m\int_a^b g\,dx \leqslant \int_a^b fg\,dx \leqslant M\int_a^b g\,dx.$$

VIII.42. *Propoziție.* Dacă f și g sînt două funcții integrabile *Riemann* pe $[a, b]$ și dacă $g \geqslant 0$ atunci există $\mu \in [m, M]$, m și M fiind marginile funcției f, astfel încît:

$$\int_a^b fg\,dx = \mu\int_a^b g\,dx.$$

VIII.43. *Teoremă.* Dacă f și g sînt două funcții continue pe $[a, b]$, f' este, de asemenea continuă pe $[a, b]$ și păstrează semn constant pe $[a, b]$ atunci există $c \in [a, b]$ astfel încît:

$$\int_a^b fg\,dx = f(a)\int_a^c g\,dx + f(b)\int_c^b g\,dx.$$

VIII.44. *Propoziție.* Dacă f și g sînt funcții integrabile *Riemann* pe $[a, b]$, atunci:

$$\left[\int_a^b fg\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2\,dx\int_a^b g^2\,dx.$$

VIII.45. *Propoziție.* Dacă $f: (0, \infty) \to R$ este o funcție continuă descrescătoare și m, n, numere întregi pozitive, $m < n$, atunci:

$$\int_m^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{r=m}^{n} f(r) \leqslant \int_{m-1}^{n} f(x)\,dx.$$

VIII.46. *Propoziție.* Dacă f este o funcție periodică de perioadă T și continuă atunci:

$$\int_a^{a+nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)\,dx.$$

unde $n \in N^*$.

VIII.47. *Propoziție.* Dacă f este o funcție derivabilă pe $[a, b]$ și $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ sînt două puncte pe graficul său, atunci lungimea arcului AB este dată de:

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

VIII.48. *Propoziție.* Aria suprafeței de rotație obținută prin rotirea unei curbe netede în jurul axei absciselor este:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

VIII.49. *Propoziție.* Volumul corpului de rotație obținut prin rotirea suprafeței delimitată de curba $y = f(x)$, axa absciselor și dreptele $x = a$, $x = b$ este:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

dacă funcția f^2 este integrabilă *Riemann*.

VIII.50. *Teoremă (Darboux).* Dacă f' este derivata unei funcții derivabile f pe un interval I, atunci derivata f' are proprietatea lui *Darboux* pe acest interval adică dacă $a, b \in I$, $a < b$ și oricare ar fi λ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, există un c_λ cuprins între a și b astfel încît $f(c_\lambda) = \lambda$.

VIII.51. *Propoziție.* O funcție continuă pe o mulțime compactă este mărginită și își atinge marginile pe această mulțime.

TESTE

VIII.T.1. Se consideră funcțiile f și g definite prin:

$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = (x - 2)(x + 1) + x + 1$.

Să se precizeze dacă:

1°). $f = g$; 2°). $f \neq g$.

VIII.T.2. Fie f și g două funcții cu valori în R, definite prin:

$$f(x) = \frac{|x| + 1}{x - 1}, \quad g(x) = \frac{|x| - 1}{x + 1}$$

și se cere să se precizeze dacă:

1°). au același domeniu maxim de definiție;

2°). nu au același domeniu maxim de definiție.

VIII.T.3. Se consideră curbele C_1, C_2, C_3 de ecuații:

$C_1: y = 1 + x + |x|$; $C_2: y = 1$; $C_3: y = 1 + 2x$.

Să se precizeze dacă:

1°). C_1 și C_2 au puncte comune;

2°). C_1 și C_3 au puncte comune;

3°). C_2 și C_3 au puncte comune.

VIII.T.4. Fie șirul $\{a_n\}_{n \in N}$ unde $a_n = \frac{3n + 1}{2n + 1}$. Să se precizeze dacă pentru $\varepsilon = 0{,}001$, termenul a_{500}:

1°). Satisface condiția $\left| a_{500} - \frac{3}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$;

2°). Nu satisface condiția 1°).

VIII.T.5. Limita $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ are valoarea:

1°). 1; 2°). 0; 3°). 3.

VIII.T.6. Se consideră $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{ax} - x}{x - a} = l.$

Să se precizeze care din afirmațiile:

1°). $|l| = +\infty$ cînd $a < 0$; 2°). $l = -\dfrac{1}{2}$ cînd $a > 0$; 3°). $l = 0$ cînd $a = -1$, sînt adevărate.

VIII.T.7. Fie funcția f dată prin $f(x) = \dfrac{m + \sin\dfrac{1}{x}}{x}$, unde $m \in R$.

Să se precizeze dacă:

1°). Există $\lim\limits_{x\nearrow 0} f$ cînd $m \in [-1, 1]$;

2°). Există $\lim\limits_{x\nearrow 0} f$ cînd $m \notin [-1, 1]$.

VIII.T.8. Se consideră funcția f_n dată prin:

$$f_n(x) = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \dots \cos\frac{x}{2^n}, \quad \text{cu} \quad x \neq 2^n k\pi, \quad k \in Z.$$

Se poate calcula $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$:

1°). Calculînd limita fiecărui factor?

2°). Înlocuind pe f_n prin g, dată de:

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}} ?$$

VIII.T.9. Să se precizeze dacă $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+a}{n-b}\right)^n = l$, este:

1°). $l = e^{a+b}$; 2°). $l = e^{a-b}$; 3°). $l = e^a/e^b$.

VIII T.10. Se consideră $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}=\iota$

și se cere să se precizeze dacă:

1°). $l=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x-1}+\ldots+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n}{x-1}-$

$-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{n}{x-1}$;

2°). $l=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}+\ldots+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$.

VIII.T.11. Se consideră $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{x}\right)$ și $\lim\limits_{x\nearrow 0} f=l_s$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f=l_d$.

Să se precizeze dacă:

1°). $l_s=l_d$; 2°). $l_s\neq l_d$;

VIII.T.12. Se consideră:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=l.$$

Să se precizeze dacă:

1°). $l=\dfrac{1}{2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n-1}{n}$; 2°). $l\neq\dfrac{1}{2}$.

VIII.T.13. Se consideră funcția f dată prin $f(x)=|x-1|$.

Se cere să se precizeze dacă:

1°). $f'(1)=1$; 2°). $f'(1)=-1$; 3°). $f'(1)$ nu există.

VIII.T.14. Se consideră funcția f dată prin $f(x)=\sin x$. Se calculează derivatele succesive pînă la derivata de ordinul VIII.

Să se precizeze dacă formula:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

este:

1°). valabilă numai pentru $n = \overline{1, 8}$;

2°). valabilă pentru orice $n \in N^*$.

VIII.T.15. Formula $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ este:

1°). valabilă numai pentru $n = 3$;

2°). valabilă pentru orice $n \in N^*$.

VIII.T.16. Fie f și g funcțiile date prin $f = \sin x$; $g = \cos x$.

Se derivează succesiv și se cere să se precizeze dacă egalitățile:

a°). $(\sin x \cos x)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} \cdot g'' + \ldots + f \cdot g^{(n)}$

b°). $(\sin x \cos x)^{(n)} = \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^{(n)} = \frac{1}{2} \sin\left(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ sînt: 1°). adevărate; 2°). numai a°) adevărată; 3°). nici a°), nici b°).

VIII.T.17. Se consideră funcțiile f și g unde:

$$f(x) = \sin x \cos x; \quad g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Se calculează $f^{(3)}$ și $g^{(3)}$ și se obține $-4 \cos 2x$.

Să se precizeze dacă:

1°). $f^{(n)} = g^{(n)}$, $(\forall) n \in N^*$; 2°). relația de la 1°) nu este întotdeauna adevărată.

VIII.T.18. Se consideră $f(x) = |x - 1|$. Funcția f are:

1°). un punct de extrem; 2°). cel puțin un punct de extrem în care derivata se anulează; 3°). un punct unghiular.

VIII.T.19. Se consideră:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ dacă } -1 \leqslant x < 0. \\ 1 - x \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Să se precizeze dacă:

1°). există mai mult de două puncte a în $[-1, 1]$ pentru care $f'(a) = 0$;

2°). există un singur astfel de punct; 3°). Nu există nici un astfel de punct.

VIII.T.20. Se consideră funcția f continuă pe $[a, b]$, derivabilă în $(a, c) \cup (c, b)$ și cu derivata infinită în punctul c. Dacă $f(a) = f(b)$, să se precizeze dacă:

1°). teorema lui *Rolle* este valabilă pentru $[a, b]$;

2°). teorema lui *Rolle* nu se poate aplica.

VIII.T.21. Se știe că dacă o funcție derivabilă are pe tot domeniul de definiție (un interval) derivata nulă, ea este constantă. Fie funcția f astfel ca:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x < 0 \\ 0 \text{ pentru } x > 0. \end{cases}$$

Să se precizeze dacă f este:

1°). constantă pe $R - [-1, 1]$;

2°). constantă pe intervalul $[-1, 1]$.

VIII.T.22. Se consideră $f(x) = |x^2 - 1|$ și se cere să se precizeze dacă graficul său se poate obține din graficul funcției $g(x) = x^2 - 1$ prin:

1°). translație; 2°). rotație; 3°). simetrie.

RĂSPUNSURI

VIII.T.1. 1°). Potrivit convenției, domeniul de definiție este R pentru ambele funcții.

VIII.T.2. $D_f = R - \{1\}$; $D_g = R - \{-1\}$. Deci 2°).

VIII.T.3. Toate variantele sînt corecte.

VIII.T.4. 1°).

VIII.T.5. 3°).

VIII.T.6. 1°), 2°).

VIII.T.7. Nu există limită cînd $m \in [-1, 1]$, limita este $-\infty$ pentru $m > 1$ și pentru $m < -1$, $+\infty$.

VIII.T.8. 2°).

VIII.T.9. 1°). da; 2°) și 3°) sînt corecte numai cînd $a = b = 0$.

VIII.T.10. 1°). nu; 2°). da.

VIII.T.11. 1°). nu; 2°). da; $l_s = 0$, $l_d = +\infty$.

VIII.T.12. 1°).

VIII.T.13. 1°). nu; 2°). nu; 3°). da.

VIII.T.14. 2°).

VIII.T.15. 2°).

VIII.T.16. 2°).

VIII.T.17. 1°).

VIII.T.18. 1°); 3°).

VIII.T.19. 3°).

VIII.T.20. 2°).

VIII.T.21. 1°), 2°). Nu întotdeauna. Teorema nu mai este valabilă dacă funcția are derivata nulă pe reuniunea de intervale.

VIII.T.22. 1°). nu; 2°). da; 3°). da, ramurile cu puncte care au ordonata negativă, se înlocuiesc cu simetricele lor în raport cu axa absciselor.

VIII.P.1[1]. Fie dat polinomul $f:R \to R$ definit prin $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ cu toate rădăcinile reale, $a_i \in R$, $(\forall) i \in \{1, \ldots, n\}$, și fie M un majorant al acestor rădăcini. Să se arate că pentru orice $x > M$:

$$(nx + a_1)\frac{f'(x)}{f(x)} \geqslant n^2.$$

VIII.P.2. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{m} C_m^i k^{m-i}}{k^m (k+1)^m}.$$

VIII.P.3. Să se calculeze:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x} \, dx, \quad k \in N^*.$$

VIII.P.4[1]. Dacă:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + x_i} = n, \quad x_i \neq -1, \quad (\forall) i \in \{1, \ldots, n\}$$

atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} (i \sum x_1 \ldots x_i) = 0.$$

VIII.P.5. Fie funcțiile $f, g:[a, b] \to R$, continue. Să se arate că dacă există un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încît:

$$\int_a^{\xi} f(x)\, dx = \int_{\xi}^{b} g(x)\, dx,$$

atunci există $\lambda \in (a, b)$ astfel ca $f(\lambda) = g(\lambda)$. Este acest λ unic?

VIII.P.6. Se dă funcția $f:[a - b, a + b] \to R$, $b > 0$, continuă.

a°). Dacă $f(a-h)=f(a+h)$, $(\forall)\, h \in [0, b]$ atunci:

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 2\int_{a}^{a+b} f(x)\,dx = 2\int_{a-b}^{b} f(x)\,dx.$$

b°). Dacă $f(a-h)=-f(a+h)$, $(\forall)\, h \in [a, b]$, atunci:

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx = 0.$$

(Stan Sava, G.M.B, 15000)

VIII.P.7. Să se calculeze fără regula lui *l'Hospital*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{nx} \ln \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{1+kx}, \quad n \in N^*.$$

VIII.P.8. Să se calculeze limita:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{a_1 x + b_1} - \operatorname{tg} \sqrt{b_1 x + a_1}}{\operatorname{tg} \sqrt{a_2 x + b_2} - \operatorname{tg} \sqrt{b_2 x + a_2}}.$$

(Marcel Chiriță, G.M.B, 11871)

VIII.P.9. Să se calculeze limita:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n}.$$

VIII.P.10[1]. Să se calculeze limita șirului cu termenul general:

$$a_n = \left(1 + \frac{1^k}{n^{k+1}+2}\right)\left(1 + \frac{2^k}{n^{k+1}+2}\right) \dots \left(1 + \frac{n^k}{n^{k+1}+2}\right),$$

$$k \in N^*.$$

VIII.P.11. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^m x + \cos^m x}{\sin^m x - \cos^m x}\right)^{\frac{m}{\cos^m x}}, \quad m \neq 0.$$

VIII.P.12. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x},\quad a,\ b,\ c,\ d>0,$$

fără a utiliza regula lui *l'Hospital. Discuție.*

VIII.P.13. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin\sqrt{x})}{x+\operatorname{tg} x}.$$

VIII.P.14. Să se calculeze:

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}$$

unde $a_i\neq a_j$, $(\forall)\ i\neq j$, $a_i\in R$, $(\forall)\ i\in\overline{1,\ n}$.

VIII.P.15*. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_n}=1,$$

p_n reprezentînd al n-lea număr prim.

VIII.P.16. Să se calculeze integralele:

a°). $I_1=\int_0^1\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x,$

b°). $I_2=\int_0^1\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

(E. Constantinescu, G.M.B, 11582)

VIII.P.17. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{27^{\operatorname{tg} 11x}-1}{33\ x}.$$

VIII.P.18[1]. Fie $f:[0,1]\to R$ o funcție crescătoare. Se presupune că pentru orice $x_1,\ x_2,\ x_3$ cu $0<x_1<x_2<x_3<1$ avem:

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Să se arate că în orice punct x_0, $0<x_0<1$, funcția f este continuă.

VIII.P.19³. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1^{k-1}}{n^k}\right)\left(1+\frac{2^{k-1}}{n^k}\right)\ldots\left(1+\frac{n^{k-1}}{n^k}\right).$$

VIII.P.20². Să se determine funcțiile continue $f: R\to R$ care satisfac următoarele proprietăți:

i°). $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=e^a$, a constant,

ii°). $(\forall)\, x, y\in R$, $(x-a)\,(y-a)\,f(x+y)=(x+y-a)\,f(x)\,f(y)$.

(Marin Vlada, G.M.B, 13494)

VIII.P.21*. Fie $C°$ grupul aditiv al funcțiilor reale continue definite pe toată dreapta reală iar C^1 grupul aditiv al funcțiilor reale derivabile și cu derivata continuă pe toată dreapta reală.

Oricărei funcții $\varphi\in C°$ i se asociază o altă funcție $T\circ\varphi$ definită pe toată dreapta reală prin relația:

$$(T\circ\varphi)\,(x)=\int_0^x t\,\varphi(t)\,dt.$$

a°). Să se demonstreze că asocierea $\varphi\mapsto T\circ\varphi$ definește o funcție de la $C°$ în C^1 iar această funcție este un homomorfism de grupuri.

b°). Să se arate că homomorfismul T este injectiv.

c°). Fie K acea submulțime a lui C^1 formată din toate funcțiile având următoarele proprietăți:

i°). $\alpha'(0)=\alpha(0)=0$,

ii°). funcția α admite derivată de ordinul doi în origine.

Să se arate că $C^1\neq K$.

d°). Pentru $\alpha\in K$, se consideră funcția:

$$\varphi_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha'(x)}{x} & \text{pentru } x\neq 0\\ \alpha''(0) & \text{pentru } x=0\end{cases}.$$

Să se arate că $\varphi_\alpha \in C^0$ și să se determine $T \circ \varphi_\alpha$.

e°). Folosind rezultatul de la punctul precedent, să se demonstreze egalitatea de mulțimi $T(C^0) = K$.

(Concurs elevi, etapa finală, 1972)

VIII.P.22[1]. Se notează cu sgn funcția definită prin:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ dacă } x < 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \\ 1 \text{ dacă } x > 0 \end{cases}.$$

Să se arate că funcția $f: R \to (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$ definită prin $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{sgn} x$ este inversabilă și că inversa ei este o funcție continuă.

VIII.P.23. Dacă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \neq 0; \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b; \quad c_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a - a_i}$$

și $d_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a - a_i}$, atunci dacă $\lim_{n \to +\infty} c_n = c$, are loc:

$$\lim_{n \to +\infty} d_n = \frac{b + c}{a}.$$

(D.M. Bătinețu, G.M.B, 9725)

VIII.P.24. Se consideră șirul $\{a_n\}_{n \in N}$ dat prin relația:

$$(\forall)\, n \in N, \; a_{n-1} = \frac{1}{\cos \frac{x}{2^n}} \cdot a_n, \text{ cu } a_0 = 1 \text{ și } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

a°). Să se calculeze a_n;

b°). Să se demonstreze că șirul $\{a_n\}_{n \in N}$ este convergent;

c°). Să se calculeze $\lim_{x \to 0} (\lim_{n \to +\infty} a_n)$.

VIII.P.25[3]. Să se determine funcțiile reale continue φ, f, g, h astfel ca $(\forall)\, x, y, z \in R$:

$$\varphi(x + y + z) = f(x) + g(y) + h(z).$$

(Marin Vlada, G.M.B, 13259)

VIII.P.26[1]. Fie $f:R\to R-\{0\}$ o funcție de două ori derivabilă. Știind că:

$$\frac{f''(x-a)}{f(x-a)}=\frac{f''(x+a)}{f(x+a)}$$

să se calculeze:

$$\begin{vmatrix} f(-a) & f(a) \\ f'(-a) & f'(a) \end{vmatrix} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{f(x-a)\,f(x+a)}.$$

(Müller Harald, G.M.B, 11731)

VIII.P.27. Fie $\{f_n\}_{n\in N^*}$ un șir de funcții definit astfel:

$$f_1(x)=1;\ f_{n+1}(x)=\int_1^x f_n(t)\,\mathrm{d}t,\quad (\forall)\,n\in N^*.$$

Notăm $a_n=f_n(2)$. Dovediți că $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

VIII.P.28[1]. Fie o funcție $f:R\to R$ definită astfel:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & \text{cînd } x \text{ este rațional} \\ 0 & \text{cînd } x \text{ este irațional} \end{cases}.$$

a°). Să se studieze continuitatea ei.
b°). Să se studieze derivabilitatea ei.

(Concurs elevi, 1972)

VIII.P.29. Dacă $f:R\to R$ este o funcție derivabilă și:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a \text{ (finit)},\ a\neq 0;$$

atunci:

$$\lim_{x\to+\infty} xf'(x)=0$$

(dacă limita există).

VIII.P.30. Fie P un polinom cu coeficienți reali. Dacă $\alpha\in R$ este unica rădăcină reală din intervalul $[a,b]$ a polinomului considerat iar $P'(\alpha)<0$, să se demonstreze că pentru orice $x\in[a,b]$ există inegalitatea:

$$\int_a^{\alpha} P(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\int_a^{x} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

VIII.P.31. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n}, \quad k \in N^*,$$

unde $a_1, \ldots, a_k \in R_0^+$ și $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$.

VIII.P.32[1]. Se consideră expresia:

$$E(x) = \frac{(a_1x + b_1)^{c_1x^2+d_1x} - (a_2x + b_2)^{c_2x^2+d_2x}}{(a_3x + b_3)^{c_3x^2+d_3x} - (a_4x + b_4)^{c_4x^2+d_4x}},$$

$$a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i \in R_0^+,\ i \in \overline{1, 4}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} E(x)$ cînd $b_3^{d_3} \neq b_4^{d_4}$.

VIII.P.33. Să se arate că polinomul $Q_{n,p}$ definit prin:

$$Q_{n,p}(x) = \int_1^x t^n(t-1)^p \, dt, \ x \in R,$$

este divizibil prin $(x-1)^{p+1}$ (n și p sînt numere întregi nenegative) și să se determine cîtul împărțirii polinomului $Q_{n,p}(x)$ prin $(x-1)^{p+1}$.

VIII.P.34. Fie P_n un polinom de gradul n. Să se arate că expresia:

$$E(x) = P_n(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!} P_n^{(k)}(x)$$

nu depinde de $x \in R$. Dacă $E = 0$, polinomul P_n admite cel puțin o rădăcină reală.

VIII.P.35. Să se calculeze:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

VIII.P.36[1]. Să se determine șirul $\{a_n\}_{n\in N}$, definit prin relația de recurență:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + n + 2, \quad (\forall)\, n \in N$$

în care $a_0 = a_1 - 1 = 0$.

VIII.P.37. Fie $f:[a, b] \to R$ o funcție cu derivate continue pe $[a, b]$ pînă la ordinul al treilea inclusiv. Dacă $f(a) = f(b) = 0$ și $f'(b) = 0$, atunci:

$$\int_a^b f'''(x)\, f(x)\, dx = \frac{1}{2}[f'(a)]^2.$$

VIII.P.38[1]. Să se calculeze suma seriei:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\pi}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{4} + \ldots$$

VIII.P.39[1]. Dacă un polinom de gradul 4 are rădăcinile în progresie aritmetică, atunci și derivata sa are rădăcinile în progresie aritmetică.

(Concurs elevi, 1975)

VIII.P.40[1]. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx.$$

VIII.P.41[3]. Fie $g:R \to R$ o funcție derivabilă astfel ca:

$$|g(x) + xg'(x)| \leqslant \mu < 1, \quad (\forall)\, x \in R.$$

Atunci există $c \in R$, unic, astfel ca $cg(c) = c$.

VIII.P.42[1]. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}_{n \text{ radicali}}.$$

VIII.P.43. Se consideră funcția reală φ definită astfel:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} \text{ pentru } x = -1 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt \text{ pentru } x \in (-1, 1). \\ \dfrac{\pi}{4} \text{ pentru } x = 1 \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției φ.

(Concurs elevi, 1972)

VIII.P.44. Se dă funcția definită prin:

$$y(x) = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

a°). Considerînd și funcția z, $z(x) = -2 \operatorname{arctg} x$, să se arate că funcțiile y și z diferă printr-o constantă, pentru $x < 0$.

b°). Să se afle valoarea constantei de la punctul a°).

VIII.P.45*. Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{1 + \sin \sqrt[k]{x}}\, dx$, $k \in N^*$.

(V. Mangu, G.M.B, 12131)

VIII.P.46. Fie f un polinom cu coeficienți reali și o funcție continuă g, neconstantă, $f:[a, b] \to R$, $a < b$. Dacă $(f \circ g)(x) = 0$, $(\forall) x \in [a, b]$, atunci $f(x) = 0$, $(\forall) x \in R$.

Interpretări.

VIII.P.47. Considerăm funcția $f:R \to R$ definită prin:

$$f(x) = \int_1^2 \frac{\sin tx}{t}\, dt.$$

Dovediți că pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ funcția f este strict crescătoare.

VIII.P.48. Să se calculeze:

$$I = \int \frac{(v + 1)(2v^2 + 4v - 1)\, dv}{v(v^3 + 4v^2 + 3v - 2)\left(\sqrt{v^2 + 2v} - \sqrt{1 - 2v - v^2}\right)},$$

cu $0 < v < 0{,}2$.

VIII.P.49. a°). Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$ și $\int_0^1 \ln (1 + x^2) \, dx$.

b°). Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$ are loc:
$$x \operatorname{arctg} x \geqslant \ln (1 + x^2).$$

VIII.P.50. Să se calculeze limitele șirurilor cu termenul general:
$$a_n = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} k \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{n} + \frac{\pi}{4} n \right);$$
$$b_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \ln (k^2 + n^2) - n \ln n \right).$$

VIII.P.51[1]. Fie $a, b \in R$, $a < b$ și n oarecare, natural. Să se arate că dacă t este fixat, $t \notin [a, b]$, există $\xi_0, \xi_1 \ldots$, $\xi_{n-1}, \xi_k \in \left(k \cdot \frac{b-a}{n} + a_0, (k+1) \frac{b-a}{n} + a_0 \right)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, astfel încît:
$$\frac{1}{\xi_0 - t} + \frac{1}{\xi_1 - t} + \ldots + \frac{1}{\xi_{n-1} - t} = \frac{n}{b-a} \ln \left| \frac{b-t}{a-t} \right|.$$

VIII.P.52. Se consideră șirul cu termenul general:
$$a_n = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \ldots + \frac{1}{b_n^2}$$
unde $b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1} \ldots$ sînt în progresie aritmetică și:
$$0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n < b_{n+1} < \ldots$$
Să se arate că șirul $\{a_n\}_{n \in N^*}$ este convergent. *Generalizare.*

VIII.P.53. Să se calculeze:
$$\lim_{t \to \frac{\pi}{k}} \left(\frac{\operatorname{ctg} t}{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{k}} \right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} kt}}, \quad k \in N^*, \; k \geqslant 3.$$

VIII.P.54. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{4n-k}}.$$

VIII.P.55[1]**.** Să se arate că:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{4}+kx\right)-1}{2^{\frac{n}{2}}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{4}+kx\right)-1}=-1.$$

Generalizare.

VIII.P.56. Să se determine funcțiile continue $f:R\to R$ care satisfac egalitatea:

$$f(x^2)+f(-x)=2f(x),\ (\forall)x\in R.$$

VIII.P.57[1]**.** Să se arate că dacă graficul unei funcții admite două axe de simetrie verticale atunci funcția este periodică.

VIII.P.58[1]**.** Să se găsească integrala generală a ecuației diferențiale:

$$x^2(x^2-1)y'=y^2+2x(x^2-1)y-x^4.$$

VIII.P.59[2]**.** Să se rezolve ecuația diferențială:

$$y'''+4y'-5y=0.$$

VIII.P.60[2]**.** Să se arate că:

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2m}x\sin^{2n+1}x\,dx=0,\ (\forall)(m,\ n)\in N^2.$$

VIII.P.61[2]**.** Să se calculeze:

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\prod_{k=1}^{n}\operatorname{tg}(a+kx)-\operatorname{tg}^n a\right).$$

VIII.P.1[1]. Se poate folosi inegalitatea mediilor (III.P.129).

VIII.P.2. Se poate folosi dezvoltarea binomului după *Newton*.

VIII.P.3. Se poate demonstra prin inducție sau se calculează diferența dintre integrala corespunzătoare pentru k și respectiv pentru $k-1$.

VIII.P.4[1]. Se poate folosi descompunerea fracției $\frac{f'(x)}{f(x)}$ în fracții simple, f fiind un polinom.

VIII.P.5. Se poate folosi teorema lui *Rolle*.

VIII.P.15*. Se are în vedere formula lui *Sierpinski* (vezi [72]) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1$, și lema *Stolz-Cesaro*.

VIII.P.17. Se poate aplica teorema lui *l'Hospital*.

VIII.P.25[3]. Se reduce ecuația la o ecuație *Cauchy*.

VIII.P.29. Se aplică, în condițiile problemei, teorema lui *l'Hospital*.

VIII.P.36[1]. Se ajunge, în final, la:

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

VIII.P.38. Se exprimă în alt mod diferența:

$$\operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x.$$

VIII.P.39[1]. Se scriu rădăcinile ecuației sub forma:

$$a-3r,\ a-r,\ a+r,\ a+3r.$$

VIII.P.40[1]. Se folosește o substituție convenabilă.

VIII.P.45*. Se calculează în prealabil integralele:

$$I_{1,k} = \int \sin \sqrt[k]{y}\, dy$$

$$I_{2,k} = \int \cos \sqrt[k]{y}\, dy.$$

VIII.P.46. Se foloseşte faptul că funcţia g are proprietatea lui *Darboux*.

SOLUŢII

VIII.P.1[1]. Se cunoaşte inegalitatea mediilor (III.P.129):

$$u_1 + \ldots + u_n \geqslant n \sqrt[n]{u_1 \ldots u_n},\ u_i > 0,\ i = \overline{1, n}$$

deci şi:

$$\left(\frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_n}\right) \geqslant n \sqrt[n]{\frac{1}{u_1} \ldots \frac{1}{u_n}},$$

care înmulţite dau:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i}\right) \geqslant n^2.$$

Dacă $M > x_i$ şi $x > M$ atunci, prin tranzitivitate, $x - x_i > 0$ deci, punînd $u_i = x - x_i$, $i = \overline{1, n}$, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n} (x - x_i) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} \geqslant n^2. \qquad (1)$$

Din $f(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$, pentru $x > \max\{x_1, \ldots, x_n\}$, prin logaritmare în baza e, obţinem:

$$\ln f(x) = \ln (x - x_1) + \ldots + \ln (x - x_n)$$

și, prin derivare:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}. \qquad (2)$$

Cum $\sum_{i=1}^{n} (x - x_i) = nx + a_1$, obținem, folosind (1) și (2):

$$(nx + a_1)\frac{f'(x)}{f(x)} \geqslant n^2.$$

VIII.P.2. Succesiv:

$$\sum_{i=1}^{m} C_m^i k^{m-i} = \sum_{i=0}^{m} C_m^i k^{m-i} - k^m = (1 + k)^m - k^m$$

deci:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{m} C_m^i k^{m-i}}{k^m \cdot (k+1)^m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^m - k^m}{k^m (k+1)^m} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^m} - \frac{1}{(k+1)^m} \right) =$$

$$= \frac{1}{1^m} - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m} + \ldots + \frac{1}{n^m} - \frac{1}{(n+1)^m} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^m}$$

astfel că:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{m} C_m^i k^{m-i}}{k^m (k+1)^m} = 1.$$

VIII.P.3. Notăm:

$$I_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x} \, dx$$

deci:

$$I_{k+1} - I_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos (k+1)x}{1 - \cos x} \, dx -$$

$$- \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos k} \, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\cos kx - \cos (k+1)x}{1 - \cos x} \, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{2 \sin \frac{2k+1}{2} x \sin \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \, dx.$$

Notăm:

$$u_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin (2k+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \, dx$$

deci:

$$u_{k+1} - u_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin (2k+3)\frac{x}{2} - \sin (2k+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos (k+1)x}{\sin \frac{x}{2}} \, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} 2 \cos (k+1)x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{k+1} \sin (k+1)x \Big|_{\varepsilon}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{k+1} [\sin (k+1) \pi - \sin 0] = 0$$

deci:

$$u_k = u_{k-1} = \ldots = u_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin x \cos \frac{x}{2} + \cos x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x \right) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} (1 + 2 \cos x) dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (x + 2 \sin x) \Big|_{\varepsilon}^{\pi} = \pi + 2 \sin \pi - 0 - 2 \sin 0 = \pi$$

Așadar:

$$I_{k+1} - I_k = \pi, \ (\forall)k \in N^*$$

sau, iterînd relația:

$$I_2 - I_1 = \pi$$
$$I_3 - I_2 = \pi,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$I_k - I_{k-1} = \pi$$

adică, adunînd se obține:

$$I_k = (k-1)\pi + I_1.$$

Dar:

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} x \Big|_{\varepsilon}^{\pi} = \pi$$

deci $I_k = k\pi$, $(\forall)k \in N^*$.

VIII.P.4[1]. Să observăm mai întîi că, făcînd $x_i \to -x_i$ relația din ipoteză devine:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - x_i} = n, \ x_i \neq 1, \ (\forall)i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad (1)$$

iar cea din concluzie:

$$\sum_{i=1}^{n} [(-1)^i i \sum x_1 \ldots x_i] = 0. \quad (2)$$

Pentru demonstrație considerăm polinomul $f: R \to R$, definit prin:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n =$$
$$= a_0(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

în care $a_0 \neq 0$. Logaritmînd în baza e și apoi derivînd,, găsim:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}, \quad (3)$$

iar pentru $x = 1$ obținem, avînd în vedere (1):

$$f'(1) = nf(1). \quad (4)$$

Dar:

$$f'(x) = a_0 n x^{n-1} + \ldots + a_n(n - n)$$

deci:

$$f'(1) = a_0 n + a_1(n - 1) + \ldots + a_n(n - n) =$$

$$= n(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) - 1 \cdot a_1 - \ldots - n \cdot a_n =$$

$$= nf(1) - \sum_{i=1}^{n} i a_i$$

sau, cum $a_i = a_0(-1)^i \sum x_1 \ldots x_i$, $i = \overline{1, n}$ (formulele lui *Vieta*, III.P.134), rezultă relația din enunț (modificată prin observația făcută).

VIII.P.5. Fie $u:[a, [\xi \to R$ definită astfel:

$$u(t) = \int_a^t f(x)\,dx - \int_a^t g(x)\,dx.$$

Deoarece funcțiile f și respectiv g sînt continue, ele admit primitive, fie acestea F și respectiv G.

Avem:

$$F'(t) = f(t);\ G'(t) = g(t).$$

Dar:

$$u(t) = F(t) - G(t) - (F(a) - G(a))$$

deci u este continuă pe $[a, \xi]$ și derivabilă pe (a, ξ). În plus, $u(a) = u(\xi) = 0$ astfel că, în baza teoremei lui *Rolle*, $(\exists)\lambda \in (a, \xi) \subset (a, b)$ astfel ca $u'(\lambda) = 0$ deci, cum $u'(t) = F'(t) - G'(t) = f(t) - g(t)$, rezultă că $(\exists)\,\lambda \in \in (a, b)$ astfel cu $f(\lambda) = g(\lambda)$.

λ nu este unic și rezultă din următorul exemplu:

$a = 0$, $b = 4\pi$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $\xi = 2\pi$

Evident:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos x\,dx$$

şi:

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4},\quad \sin\frac{9\pi}{4}=\cos\frac{9\pi}{4}.$$

VIII.P.6. a°). Succesiv:

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx=\int_{a}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{a+b} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{-b}^{0} f(a+t)\,dt+\int_{a}^{a+b} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{-b}^{0} f(a-t)\,dt+\int_{a}^{a+b} f(x)\,dx=$$

$$=-\int_{a+b}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{a+b} f(x)\,dx=2\int_{a}^{a+b} f(x)\,dx.$$

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx=\int_{a-b}^{a} f(x)\,dx+\int_{0}^{b} f(a+t)\,dt=$$

$$=\int_{a-b}^{a} f(x)\,dx+\int_{0}^{b} f(a-t)\,dt=$$

$$=\int_{a-b}^{a} f(x)\,dx-\int_{a}^{a-b} f(x)\,dx=2\int_{a-b}^{a} f(x)\,dx.$$

b°). De asemenea:

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)\,dx=\int_{a-b}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{a+b} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{a-b}^{a} f(x)\,dx+\int_{0}^{b} f(a+t)\,dt=$$

$$=\int_{a-b}^{a} f(x)\,dx-\int_{0}^{b} f(a-t)\,dt=$$

$$=\int_{a-b}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{a-b} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{a-b}^{a} f(x)\,dx-\int_{a-b}^{a} f(x)\,dx=0.$$

VIII.P.7. Limita dată se mai scrie:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{nx}\ln\left[(1+x)\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}\ldots\sqrt[n]{1+nx}\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x}+\ldots+\frac{\ln(1+nx)}{nx}\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}+\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\ln(1+nx)^{\frac{1}{nx}}\right]=\frac{1}{n}\left[\lim_{\substack{u_i\to 0\\ i=1,2,\ldots,n}}(\ln(1+u_1)^{\frac{1}{u_1}}+\right.$$

$$\left.+\ln(1+u_2)^{\frac{1}{u_2}}+\ldots+\ln(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}})\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n\text{ de }1}=1.$$

VIII.P.8. Succesiv:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\sqrt{a_1x+b_1}-\operatorname{tg}\sqrt{b_1x+a_1}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\sqrt{a_1x+b_1}-\sqrt{b_1x+a_1})}{(x-1)\cos\sqrt{a_1x+b_1}\cos\sqrt{b_1x+a_1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\sqrt{a_1x+b_1}-\sqrt{b_1x+a_1})}{\sqrt{a_1x+b_1}-\sqrt{b_1x+a_1}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{a_1x+b_1}-\sqrt{b_1x+a_1}}{x-1}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{\cos\sqrt{a_1x+b_1}\cos\sqrt{b_1x+a_1}}=$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{a_1 x + b_1 - (b_1 x + a_1)}{x - 1} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{a_1 x + b_1} + \sqrt{b_1 x + a_1}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{a_1 + b_1}} =$$

$$= \frac{a_1 - b_1}{2\sqrt{a_1 + b_1} \cos^2 \sqrt{a_1 + b_1}} \cdot$$

Analog:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\operatorname{tg} \sqrt{a_2 x + b_2} - \operatorname{tg} \sqrt{b_2 x + a_2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{a_2 + b_2} \cos^2 \sqrt{a_2 + b_2}}{a_2 - b_2}$$

(acesta întrucît:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1).$$

Rezultă:

$$\lim_{n \to 1} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{a_1 x + b_1} - \operatorname{tg} \sqrt{b_1 x + a_1}}{\operatorname{tg} \sqrt{a_2 x + b_2} - \operatorname{tg} \sqrt{b_2 x + a_2}} =$$

$$= \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \cdot \frac{\sqrt{a_2 + b_2}}{\sqrt{a_1 + b_1}} \cdot \frac{\cos^2 \sqrt{a_2 + b_2}}{\cos^2 \sqrt{a_1 + b_1}} \cdot$$

VIII.P.9. Folosind definiția integralei:

$$\lim_{n \to 0} \frac{1}{n} \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin^2 \frac{n\pi}{n} \right) =$$

$$= \int_0^1 \sin^2 \pi x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2\pi x) \, dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4\pi} \sin 2\pi x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot$$

VIII.P.10[1]. Se știe că:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1.$$

Avem:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{i^k}{n^{k+1}+2}=0,\ (i\in\overline{1,n})$$

deci pentru fiecare $\varepsilon>0$ și $i\in\overline{1,n}$ există $k(\varepsilon,i)$ așa încît:

$$1-\varepsilon<\frac{\ln\left(1+\frac{1^k}{n^{k+1}+2}\right)}{\frac{1^k}{n^{k+1}+2}}<1+\varepsilon,\ (\forall)\ n>k\ (\varepsilon,1),$$

.....

$$1-\varepsilon<\frac{\ln\left(1+\frac{n^k}{n^{k+1}+2}\right)}{\frac{n^k}{n^{k+1}+2}}<1+\varepsilon,\ (\forall)\ n>k(\varepsilon,n).$$

Fie $k_1=\max\{k(\varepsilon,1),\ldots,k(\varepsilon,n)\}$. Așadar:

$$1-\varepsilon<\frac{\ln\left(1+\frac{i^k}{n^{k+1}+2}\right)}{\frac{i^k}{n^{k+1}+2}}<1+\varepsilon,$$

$$(\forall)\ i\in\{1,2,\ldots,n\},\ (\forall)\ n>k_1.$$

Dînd lui i valorile $1,2,\ldots,n$ și adunînd relațiile astfel obținute rezultă:

$$1-\varepsilon<\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i^k}{n^{k+1}+2}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{i^k}{n^{k+1}+2}}<1+\varepsilon,\ (\forall)\ n>k_1$$

ceea ce înseamnă că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i^k}{n^{k+1}+2}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{i^k}{n^{k+1}+2}} = 1.$$

Dar:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^k}{n^{k+1}+2} = \frac{1}{k+1}$$

după cum se poate ușor demonstra folosind lema *Stolz-Cesaro* (vezi [59]), deci:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i^k}{n^{k+1}+2}\right) = e^{\frac{1}{k+1}}.$$

VIII.P.11. Succesiv:

$$\left(\frac{\sin^m x + \cos^m x}{\sin^m x - \cos^m x}\right)^{\frac{m}{\cos^m x}} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{2\cos^m x}{\sin^m x - \cos^m x}\right)^{\frac{\sin^m x - \cos^m x}{2\cos^m x}}\right]^{\frac{2m}{\sin^m x - \cos^m x}}.$$

Cînd $x \to \frac{\pi}{2}$, $l = \frac{2\cos^m x}{\sin^m x - \cos^m x} \to 0$ deci limita

căutată este:

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2m}{\sin^m x - \cos^m x}} = e^{2m}.$$

VIII.P.12. Fie $a^x - 1 = y$. Cînd $x \to 0$ rezultă $y \to 0$.

Avem $x = \dfrac{\ln (1+y)}{\ln a}$ și:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{y}{\dfrac{\ln (y+1)}{\ln a}} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \ln a \cdot \frac{y}{\ln (1+y)} = \ln a.$$

Deci:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{a^x - 1}{x} - \dfrac{b^x - 1}{x}}{\dfrac{c^x - 1}{x} - \dfrac{d^x - 1}{x}} =$$

$$= \frac{\ln a - \ln b}{\ln c - \ln d} = \log_{\frac{c}{d}} \frac{a}{b}.$$

Dacă $c = d$, $a \neq b$ limita nu există iar dacă $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \neq 1$ atunci limita este egală cu 1. De remarcat că a, b, c, d trebuie să fie pozitive (odată pentru existenta logaritmului, apoi chiar din existența funcțiilor de genul a^x).

VIII.P.13. Succesiv:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln (1 + \sin \sqrt{x})}{x + \operatorname{tg} \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin \sqrt{x} \ln (1 + \sin \sqrt{x})^{\frac{1}{\sin \sqrt{x}}}}{x + \operatorname{tg} \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{x + \operatorname{tg} \sqrt{x}} \cdot \lim_{x\to 0} \ln (1 + \sin \sqrt{x})^{\frac{1}{\sin \sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{x + \operatorname{tg} \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x} \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \sqrt{x}} + \dfrac{1}{\cos \sqrt{x}}} = \frac{1}{0 \cdot 1 + 1} = 1.$$

VIII.P.14. Fie $g(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n)$. Conform formulei lui *Lagrange*:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g'(a_1)} \cdot \frac{1}{x - a_1} + \dots + \frac{1}{g'(a_n)} \cdot \frac{1}{x - a_n}$$

deci:

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{g'(a_k)} \cdot \frac{1}{x - a_k} \right] dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{g'(a_k)} \ln |x - a_k| + C.$$

VIII.P.15*. Folosim formula lui *Sierpinski* (vezi [72]):

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1$$

care duce la:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1.$$

În adevăr, din:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1$$

și:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1) \ln (n+1)}{p_{n+1}} = 1$$

obținem, prin înmulțire:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{p_{n+1}} \cdot \lim \frac{n+1}{n} \cdot \lim \frac{\ln (n+1)}{\ln n} = 1$$

adică:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_n}{p_{n+1}}=1 \text{ sau } \lim_{n\to+\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n}=1.$$

Să arătăm că dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to a,\ a_n>0,\ (\forall)\ n\in N^*$ atunci $\sqrt[n]{a_n}\to a$.

Avem, conform lemei *Stolz-Cesaro* (vezi [59]):

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{a_2}{a_1}+\ln\frac{a_3}{a_2}+\ldots+\ln\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{a_n}{a_1}}{n}$$

adică:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}.$$

Făcînd $a_n=p_n$ obținem relația din enunț.

VIII.P.16. Succesiv:

$$I_2=\int_0^1\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=$$

$$=\int_0^1(\sqrt{1+x^2})'\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx=$$

$$=(\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C)\Big|_0^1-$$

$$-\int_0^1\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=$$

$$=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-x\Big|_0^1=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-1.$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln (x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx =$$

$$= \int_0^1 [\ln (x + \sqrt{1 + x^2})]' \ln (x + \sqrt{1 + x^2})\, dx =$$

$$= \frac{\ln^2 (x + \sqrt{1 + x^2})}{2}\Big|_0^1 = \frac{\ln^2 (1 + \sqrt{2})}{2}.$$

VIII.P.17. Sîntem în cazul de aplicabilitate a formulei lui *l'Hospital*, anume pentru cazul $\frac{0}{0}$.

Aşadar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{27^{\operatorname{tg} 11x} - 1}{33x} = \lim_{x \to 0} \frac{(27^{\operatorname{tg} 11x} - 1)'}{(33x)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{27^{\operatorname{tg} 11x} \cdot \frac{11}{\cos^2 11x} \ln 27}{33}$$

$$= \frac{11 \cdot 3 \cdot \ln 3}{33} = \ln 3.$$

VIII.P.18[1]. Pe segmentul (0, 1) luăm în ordine punctele x, x_0, x_3 adică $x < x_0 < x_3$. Conform cu enunţul:

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}.$$

Dar $x_0 - x > 0$ deci:

$$0 \leqslant f(x_0) - f(x) \leqslant (x_0 - x) \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$$

şi trecînd la limită, obţinem:

$$0 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} 0 \leqslant \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} [f(x_0) - f(x)] \leqslant \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \left[(x_0 - x) \cdot \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}\right]$$

adică $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.

deci funcția are limită laterală la stînga în x_0.

Fie $0 < x_0 < x < x_3 < x_4 < 1$ pentru care:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x)}{x_3 - x} \leqslant \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

deci:

$$f(x) - f(x_0) \leqslant (x - x_0) \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

adică, trecînd la limită:

$$0 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} 0 \leqslant \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} [f(x) - f(x_0)] \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} (x - x_0) \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

de unde:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Limitele laterale în x_0 fiind egale cu valoarea lui f în x_0, funcția este deci continuă.

Funcția f nu este totdeauna continuă în $x = 1$, un contraexemplu fiind dat de funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \text{ pentru } x \in [0, 1) \\ 1 \text{ pentru } x = 1, \end{cases}$$

care îndeplinește condiția din enunț.

VIII.P.19[3]. Avem:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = 1$$

și:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{i^{k-1}}{n^k} = 0, \ (\forall) \ i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

deci:

$$(\forall)\,\varepsilon > 0,\ (\forall)\ i \in 1,\ \overline{n,\ (\exists)}\ k\,(\varepsilon,\ i) \in N^*$$

astfel încît:

$$1-\varepsilon < \frac{\ln\left(1+\frac{1^{k-1}}{n^k}\right)}{\frac{1^{k-1}}{n^k}} < 1+\varepsilon,\ (\forall)\ n > k(\varepsilon,\ 1)$$

.....

$$1-\varepsilon < \frac{\ln\left(1+\frac{n^{k-1}}{n^k}\right)}{\frac{n^{k-1}}{n^k}} < 1+\varepsilon,\ (\forall)\ n > k\,(\varepsilon,\ n).$$

Aşadar:

$$1-\varepsilon < \frac{\ln\left(1+\frac{i^{k-1}}{n^k}\right)}{\frac{i^{k-1}}{n^k}} < 1+\varepsilon,\ (\forall)\ i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\},$$

$$(\forall)\ n > \max\ \{k(\varepsilon,\ 1),\ \ldots\ k(\varepsilon,\ n)\} = k_1.$$

Dînd lui i valorile 1, 2, ..., n şi adunînd relaţiile astfel obţinute, găsim că:

$$(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{k-1}}{n^k} < \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i^{k-1}}{n^k}\right) < (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{k-1}}{n^k},$$

$$(\forall)\ n > k_1$$

deci:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i^{k-1}}{n^k}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{k-1}}{n^k}} = 1.$$

Dar:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{k-1}}{n^k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{k-1}=$$

$$=\int_0^1 x^{k-1}\,dx=\frac{1}{k}\,x^k\Big|_0^1=\frac{1}{k}.$$

Deci:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i^{k-1}}{n^k}\right)=\lim_{n\to+\infty}\ln\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i^{k-1}}{n^k}\right)=\frac{1}{k}$$

de unde $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i^{k-1}}{n^k}\right)=e^{\frac{1}{k}}$.

VIII.P.20[2]. Construim funcția $\lambda : R\to R$ astfel:

$$\lambda(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-a} & \text{pentru } x\neq a\\ e^a & \text{pentru } x=a.\end{cases}$$

Conform cu (1), λ este continuă pe toată dreapta reală. Ținînd seama de (2) obținem:

$$\lambda(x+y)=\lambda(x)\cdot\lambda(y),$$

ecuație care are soluția, după cum se știe, $\lambda(x)=e^{kx}$.

Dar $\lambda(a)=e^a$ deci $k=1$ adică $\lambda(x)=e^x$, deci $f(x)=(x-a)e^x$.

VIII.P.21*. a°). Cum funcția φ este continuă pe R rezultă că și funcția ξ, $\xi(t)=t\varphi(t)$, este continuă pe R și deci admite o primitivă derivabilă pe R. Fie $F(t)=\int t\varphi(t)\,dt$. Așadar:

$$(T\circ\varphi)\,(x)=F(x)-F(0),$$

conform relației din enunț, fapt că arată că $T\circ\varphi$ este derivabilă pe R și anume $(T\circ\varphi)'(x)=F'(x)=x\varphi(x)$.

Se vede că funcția $(T\circ\varphi)'$ este continuă, deci $T\circ\varphi\in C^1$.

În continuare:

$$[T \circ (\varphi_1 + \varphi_2)](x) = \int_0^x t(\varphi_1(t) + \varphi_2(t))\,dt =$$

$$= \int_0^x t\varphi_1(t)\,dt + \int_0^x t\varphi_2(t)\,dt = (T \circ \varphi_1)(x) + (T \circ \varphi_2)(x)$$

deci aplicația $T: C^0 \to C^1$ este un homomorfism de grupuri.

b°). Să presupunem că pentru două funcții φ_1, $\varphi_2 \in C^0$ avem $(T \circ \varphi_1)(x) = (T \circ \varphi_2)(x)$, ceea ce atrage după sine $(T \circ \varphi_1)'(x) = (T \circ \varphi_2)'(x)$, $(\forall)\ x \in R$, adică:

$$x(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = 0,$$

de unde, pentru orice $x \in R - \{0\}$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

Presupunînd, prin absurd, că $\varphi_1(0) \neq \varphi_2(0)$, ar urma că există o întreagă vecinătate U a lui 0 astfel încît $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$, pentru orice $x \in U$, deoarece $\varphi_1, \varphi_2 \in C^0$, absurd. Deci T este un homomorfism injectiv.

c°). Ca un contraexemplu putem lua funcția $f: R \to R$ definită prin $f(x) = 2x$ care este continuă pe R, deci aparține lui C^0 fără a îndeplini i°). Deci, oricum, $C^0 \neq K$.

d°). În toate punctele diferite de 0, φ_α este continuă și:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\alpha'(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\alpha'(x)}{x} = \alpha''(0) \text{ deci } \varphi_\alpha \in C^0.$$

$$(T \circ \varphi_\alpha)(x) = \int_0^x t\varphi_\alpha(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^x t\varphi_\alpha(t)\,dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^x t \frac{\alpha'(t)}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(t)\Big|_\varepsilon^x = \lim_{\varepsilon \to 0} (\alpha(x) - \alpha(\varepsilon)) =$$

$$= \alpha(x) - \alpha(0) = \alpha(x).$$

e°). Conform celor arătate la punctul d°), pentru orice $\alpha \in K$, $(\exists)\ \varphi_\alpha \in C^0$ astfel încît $(T \circ \varphi_\alpha) = \alpha$; urmează că $\alpha \in T(C^0)$, ca atare $K \subseteq T(C^0)$.

Pentru a arăta incluziunea inversă, trebuie să stabilim că pentru orice $\varphi \in C^\circ$, $T \circ \varphi \in K$, cu alte cuvinte că $T \circ \varphi$ are proprietățile i°) și ii°).

În adevăr:

$$(T \circ \varphi)(0) = F(0) - F(0) = 0$$
$$(T \circ \varphi)'(0) = 0 \cdot \varphi(0) = 0$$

deci i)°;

$$(T \circ \varphi)''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{(T \circ \varphi)'(x) - (T \circ \varphi)'(0)}{x} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\,\varphi(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \varphi(x) = \varphi(0)$$

deci $T(C^\circ) = K$.

VIII.P.22[1]. Eivdent;

$$f(x) = \begin{cases} -(1 + x^2) & \text{pentru } x < 0, \\ 0 & \text{pentru } x = 0, \\ 1 + x^2 & \text{pentru } x > 0, \end{cases}$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -1, \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$$

deci f nu este continuă în 0 și nici derivabilă.

Pentru $x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{pentru } x < 0 \\ 2x & \text{pentru } x > 0 \end{cases}.$$

Deoarece $f'(x) > 0$, $(\forall)\ x \in R - \{0\}$ și $f(0) = 0$ rezultă că f este strict crescătoare, deci injectivă pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Imaginea lui f este $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$.

Funcția este surjectivă deoarece $(\forall)\ y \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$, ecuația $f(x) = y$ admite o soluție reală. Deci f este inversabilă și:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-1 - x} & \text{pentru } x < -1 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ \sqrt{x - 1} & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$$

Funcția f^{-1} este continuă pe $(-\infty, -1)$ și $(1, +\infty)$ fiind o funcție elementară cunoscută, precum și în 0 un punct izolat al domeniului de definiție.

VIII.P.23. Este clar că:

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a - a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{ab_i}{a(a - a_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\dfrac{ab_i + a_ib_i - a_ib_i}{a - a_i}}{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\dfrac{a_ib_i + b_i(a - a_i)}{a - a_i}}{a} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\dfrac{a_ib_i}{a - a_i} + b_i}{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a} + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_ib_i}{a - a_i} =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i + c_n\right)$$

și trecînd la limită:

$$\lim_{n \to +\infty} d_n = \frac{1}{a}\left(\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i + \lim_{n \to +\infty} c_n\right) = \frac{b + c}{a}.$$

VIII.P.24. a°). Din $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \cos \dfrac{x}{2^n}$ obținem:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k},$$

de unde:

$$\frac{a_1 \dots a_n}{a_0 \dots a_{n-1}} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n}; \quad a_0 = 1$$

adică:

$$a_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \left(2 \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2} \dots \cos \frac{x}{2^n}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2 \sin \dfrac{x}{2^n}} = \frac{\cos \dfrac{x}{2} \dots \cos \dfrac{x}{2^{n-1}} \sin \dfrac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \dfrac{x}{2^n}} =$$

$$= \frac{\cos \dfrac{x}{2} \dots \cos \dfrac{x}{2^{n-2}} \left(2 \sin \dfrac{x}{2^{n-1}} \cos \dfrac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^2 \sin \dfrac{x}{2^n}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} \dots \cos\frac{x}{2^{n-2}} \sin\frac{x}{2^{n-2}}}{2^2 \sin\frac{x}{2^n}} = \dots = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$$

deci:

$$a_n = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}.$$

b°). Şirul este descrescător. În adevăr:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \cos\frac{x}{2^n} < 1$$

deci:

$$a_n < a_{n-1} < \dots < a_0.$$

Şirul este mărginit. În adevăr:

$$a_n = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} > 0,$$

deoarece $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi încă $a_n < a_0 = 1$.

Fiind monoton şi mărginit, şirul $\{a_n\}_{n\in N}$ este convergent.

c°). $\lim\limits_{x\to 0} (\lim\limits_{n\to+\infty} a_n) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} \right) =$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} \right)$$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{u_n\to 0} \frac{u_n}{\sin u_n} = 1 \cdot 1 = 1$, unde $u_n = \frac{x}{2^n}$.

VIII.P.25[3]. Dacă $x = 0$, relaţia din enunţ se scrie:

$$\varphi(y + z) = f(0) + g(y) + h(z),$$

de unde:

$$g(y) + h(z) = \varphi(y + z) - f(0)$$

deci relația din enunț devine:

$$\varphi(x + y + z) = f(x) + \varphi(y + z) - f(0),$$

care pentru $y = z = 0$ dă:

$$\varphi(x) = f(x) + \varphi(0) - f(0),$$

de unde:

$$f(x) = \varphi(x) + f(0) - \varphi(0)$$

În concluzie:

$$\varphi(x + y + z) = \varphi(x) + \varphi(y + z) - \varphi(0).$$

Fie $y + z = t$ și $F(u) = \varphi(u) - \varphi(0)$. Obținem:

$$F(x + t) = F(x) + F(t),$$

ecuație funcțională *Cauchy* cu soluția

$$F(x) = \lambda x, \ \lambda = \text{const.}, \ \lambda \in R.$$

Deci $\varphi(x) = \lambda x + \varphi(0)$, $(\forall)x \in R$, și avînd în vedere relațiile anterioare:

$$f(x) = \lambda x + f(0), \ (\forall)x \in R,$$
$$g(x) = \lambda x + \varphi(0) - f(0) - h(0), \ (\forall)x \in R,$$
$$h(x) = \lambda x + \varphi(0) - f(0) - g(0), \ (\forall)x \in R,$$

sau, notînd:

$$\varphi(0) = \alpha, \ \varphi(0) - f(0) - h(0) = \gamma,$$
$$f(0) = \beta, \ \varphi(0) - f(0) - g(0) = \delta,$$

obținem:

$$\varphi(x) = \lambda x + \alpha, \ f(x) = \lambda x + \beta,$$
$$g(x) = \lambda x + \gamma, \ h(x) = \lambda x + \delta$$

unde λ, a, β, γ, δ sînt constante arbitrare reale, astfel ca:

$$\alpha = \beta + \gamma + \delta.$$

VIII.P.26[1].

$$\frac{f''(x-a)}{f(x-a)} = \frac{f''(x+a)}{f(x+a)} \Rightarrow \begin{vmatrix} f(x-a) & f(x+a) \\ f''(x-a) & f''(x+a) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f(x-a) & f(x+a) \\ f'(x-a) & f'(x+a) \end{vmatrix} = 0$$

adică:

$$\begin{vmatrix} f(x-a) & f(x+a) \\ f'(x-a) & f'(x+a) \end{vmatrix} = \text{const.} = \begin{vmatrix} f(-a) & f(a) \\ f'(-a) & f'(a) \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} f(-a) & f(a) \\ f'(-a) & f'(a) \end{vmatrix} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{f(x-a)f(x+a)} =$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{1}{\dfrac{f(x+a)}{f(x-a)}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} f(x-a) & f(x+a) \\ f'(x-a) & f'(x+a) \end{vmatrix}}{f^2(x-a)} \mathrm{d}x =$$

$$= \ln \left| \frac{f(x+a)}{f(x-a)} \right| \Big|_{-a}^{a} = \ln \left| \frac{f(2a)\ f(-2a)}{f^2(0)} \right|.$$

VIII.P.27. Succesiv:

$$f_1(x) = 1 = \frac{(x-1)^0}{0!};$$

$$f_2(x) = \int_1^x f_1(t)\,\mathrm{d}t = x - 1 = \frac{(x-1)^1}{1!};$$

$$f_3(x) = \int_1^x f_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(x-1)^2}{2!}.$$

Presupunem:

$$f_n(x) = \frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

și rezultă:

$$f_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(t-1)^n}{n!}\Big|_1^x = \frac{(x-1)^n}{n!}.$$

Avem:

$a_n = f_n(2) = \dfrac{1}{n!}$. Este clar că $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(2) = 0$ deci $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

VIII.P.28[1]. Pentru ca f să fie continuă în α trebuie ca pe orice şir ne-am apropia de α:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \to \alpha$$

să avem:

$$\lim_{x_n \to \alpha} f(x_n) = f(\alpha).$$

Fie:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \to \alpha, \; x_i \in Q,$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \to \alpha, \; y_i \in \mathbf{C}_R Q.$$

Trebuie ca:

$$\lim_{x_n \to \alpha} f(x_n) = \lim_{y_n \to \alpha} f(y_n) = f(\alpha)$$

adică $\alpha^3 - \alpha^2 = 0$ de unde $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$.

Deci numai în 0 şi 1 funcţia este continuă.

În punctele în care o funcţie este derivabilă ea este continuă, şi deci negînd această implicaţie, rezultă că o funcţie discontinuă într-un punct este nederivabilă în acel punct. Rămîn de studiat cazurile 0 şi 1.

Fie: $\begin{cases} x_1, \ldots, x_n \ldots \to 0, & x_i \in Q, \\ y_1, \ldots, y_n \ldots \to 0, & y_i \in \mathbf{C}_R Q, \\ x_1', \ldots, x_n', \ldots \to 1, & x_i' \in Q, \\ y_1', \ldots, y_n', \ldots \to 1, & y_i' \in \mathbf{C}_R Q, \end{cases}$

patru şiruri. Avem:

$$\lim_{x_n' \to 1} \frac{f(x_n') - f(1)}{x_n' - 1} = \lim_{x_n' \to 1} \frac{(x_n')^3 - (x_n')^2 - 0}{x_n' - 1} =$$

$$= \lim_{x_n' \to 1} (x_n')^2 = 1,$$

$$\lim_{y_n' \to 1} \frac{f(y_n') - f(1)}{y_n' - 1} = 0,$$

deci nu există $f'(1)$. În continuare:

$$\lim_{x_n \to 0} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{x_n \to 0} \frac{x_n^3 - x_n^2 - 0}{x_n} = 0,$$

$$\lim_{y_n \to 0} \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = 0$$

deci $f'(0)$ există.

VIII.P.29. Din $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ rezultă $\lim_{x \to +\infty} \frac{x f(x)}{x} = a$ sau, aplicînd regula lui *l'Hospital*, în condiţiile enunţului:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{(xf(x))'}{x'} = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} xf'(x),$$

de unde $\lim_{x \to +\infty} xf'(x) = 0$.

VIII.P.30. Se ştie că dacă $f'(x_0) = 0$, atunci x_0 este punct de extrem, anume:
dacă $f''(x_0) < 0$, atunci x_0 este punct de maxim, iar dacă $f''(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim.

Considerăm funcţia F definită prin $F(x) = \int_a^x P(t)\,dt$.

Avem $F'(x) = P(x)$ şi $F'(\alpha) = P(\alpha) = 0$ şi $F''(\alpha) = P'(\alpha) < 0$ deci α este punct de maxim, adică $F(x) \leqslant F(\alpha)$ sau:

$$\int_x^x P(t)\,dt \leqslant \int_a^\alpha P(t)\,dt.$$

VII.P.31. Evident:

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} < \sqrt[n]{a_1^n + \ldots + a_k^n} < \sqrt[n]{k a_k^n} = a_k \sqrt[n]{k},$$

deci:

$$a_k = \lim_{n \to +\infty} a_k \leqslant \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \ldots + a_k^n} \leqslant \lim_{n \to +\infty} a_k \sqrt[n]{k} = a_k.$$

VIII.P.32[1]. Avem:

$$\lim_{x \to 0} (a_i x + b_i)^{c_i x^3 + d_i x} = 1, \ (\forall)\ i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

și:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a_ix+b_i)^{c_ix^2+d_ix}-1}{x}=\left[(a_ix+b_i)^{c_ix^2+d_ix}\right]'_{x=0}=$$

$$=[(c_ix^2+d_ix)\cdot a_i\cdot(a_ix+b_i)^{c_ix^2+d_ix-1}+$$

$$+(2c_ix+d_i)\,(a_ix+b_i)^{c_ix^2+d_ix}\ln(a_ix+b_i)]_{x=0}=d_i\ln b_i$$

deci:

$$\lim_{x\to 0}E(x)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[(a_1x+b_1)^{c_1x^2+d_1x}-1]-[(a_2x+b_2)^{c_2x^2+d_2x}-1]}{[(a_3x+b_3)^{c_3x^2+d_3x}-1]-[(a_4x+b_4)^{c_4x^2+d_4x}-1]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(a_1x+b_1)^{c_1x^2+d_1x}-1}{x}-\dfrac{(a_2x+b_2)^{c_2x^2+d_2x}-1}{x}}{\dfrac{(a_3x+b_3)^{c_3x^2+d_3x}-1}{x}-\dfrac{(a_4x+b_4)^{c_4x^2+d_4x}-1}{x}}=$$

$$=\frac{d_1\ln b_1-d_2\ln b_2}{d_3\ln b_3-d_4\ln b_4}.$$

VIII.P.33. Evident $Q_{n,p}(1)=0$ deci polinomul dat se divide cu $x-1$. Pentru a dovedi că este divizibil cu $(x-1)^{p+1}$ mai este necesar să arătăm că polinomul derivat $\dfrac{dQ_{n,p}}{dx}$ se împarte exact la $(x-1)^p$; însă:

$$\frac{dQ_{n,p}(x)}{dx}=x^n(x-1)^p$$

și proprietatea este demonstrată.

Pentru a găsi cîtul împărțirii lui $Q_{n,p}(x)$ la $(x-1)^{p+1}$, să facem substituția $t-1=\tau$ în integrala din enunț.

Avem:

$$Q_{n,p}(x) = \int_0^{x-1} (\tau + 1)^n \tau^p d\tau = \int_0^{x-1} \left(\sum_{S=0}^{n} C_n^S \tau^{S+p} \right) d\tau =$$

$$= \sum_{S=0}^{n} C_n^S \frac{\tau^{S+p+1}}{S+p+1} \Bigg|_0^{x-1} = \sum_{S=0}^{n} C_n^S \frac{(x-1)^{S+p+1}}{S+p+1} =$$

$$= (x-1)^{p+1} \sum_{S=0}^{n} C_n^S \frac{(x-1)^S}{S+p+1}.$$

Cîtul căutat este deci:

$$\sum_{S=0}^{n} C_n^S \frac{(x-1)^S}{S+p+1}.$$

VIII.P.34. Deoarece P_n este un polinom de gradul n, rezultă:

$$P_n^{(n+1)}(x) = 0, \quad (\forall) x \in R. \tag{1}$$

Derivînd expresia din enunț se obține:

$$\frac{dE}{dx} = P_n'(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} P_n^{(k)}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{x^k}{k!} P_n^{(k+1)}(x) \right]$$

sau încă:

$$\frac{dE}{dx} = P_n'(x) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!} P_n^{(k+1)}(x) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!} P_n^{(k+1)}(x)$$

de unde obținem, făcînd reducerile:

$$\frac{dE}{dx} = -(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} P_n^{(n+1)}(x)$$

și, ținînd seama de (1), rezultă $\frac{dE}{dx} = 0$ deci E este constantă.

Dacă $E = 0$, atunci:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{x^k}{k!} P_n^{(k)}(x) =$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{k-1}}{k!} P_n^{(k)}(x).$$

Dacă:

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{k-1}}{k!} P_n^{(k)}(x)$$

atunci $P_n(x) = xQ(x)$ deci polinomul P_n admite o rădăcină nulă.

VIII.P.35. Succesiv:

$$0 \leqslant \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg} x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg} x}.$$

Dar:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

și cum $x < \operatorname{tg} x$ rezultă:

$$0 \leqslant \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg} x} \leqslant \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{u \to +\infty} \frac{u}{e^u} = 0$$

deci limita căutată este 0 $\left(\text{am folosit substituția } \frac{1}{x} = \right.$

$\left. = u \text{ și cum } x \to 0, x > 0 \text{ rezultă că } u \to +\infty\right)$.

VIII.P.36[1]. Avem succesiv, după ce transformăm expresia:

$$a_0 - 2a_1 + a_2 = 2$$
$$a_1 - 2a_2 + a_3 = 3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n = n.$$

Adunînd relațiile, obținem:

$$a_0 - a_1 - a_{n-1} + a_n = 2 + 3 + \dots + n$$

de unde

$$a_n - a_{n-1} = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Iterînd această relație:

$$a_1 - a_0 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1$$
$$a_2 - a_1 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2$$
$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} \cdot n$$

de unde, adunînd:

$$a_n - a_0 = \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + \frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + n) =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

deci:

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

VIII.P.37. Aplicăm formula de integrare prin părți și ținem seama de condiția din enunț:

$$\int_a^b f'''(x) f(x)\, dx = f''(x) f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f''(x) f'(x)\, dx =$$
$$= f''(b) f(b) - f''(a) f(a) - \frac{1}{2}[f'(x)]^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2}[f'(a)]^2.$$

VIII.P.38[1]. Folosim identitatea:

$$\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{2}{\operatorname{tg} 2x} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x$$

astfel că putem scrie:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 2\operatorname{ctg} 2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2^2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$$

. . . . . .

$$\frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{ctg} \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{\pi}{4}$$

sau, adunînd şi reducînd:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Trecînd la limită după n, obţinem:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{4} + \ldots =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4 \cdot 2^n} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} x =$$

$$= \lim_{x \to 0} x \frac{\cos \frac{\pi}{4} x}{\sin \frac{\pi}{4} x} = \lim_{x \to 0} \cos \frac{\pi}{4} x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\pi}{4} x}{\sin \frac{\pi}{4} x} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

VIII.P.39[1]. Putem scrie rădăcinile sub forma $a - 3r$, $a - r$, $a + r$, $a + 3r$, $r > 0$, și polinomul se scrie ($2r$ este rația progresiei):

$$P(x) = a_0(x - a + 3r)(x - a + r)(x - a - r)(x - a - 3r)$$

adică:

$$P(x) = a_0[(x - a)^2 - 9r^2][(x - a)^2 - r^2] =$$
$$= a_0[(x - a)^4 - 10\, r^2(x - a)^2 + 9r^4].$$

Derivata sa:

$$P'(x) = a_0[4(x - a)^3 - 20r^2(x - a)]$$

are rădăcinile:

$$x_1 = a - r\sqrt{5},\ x_2 = a,\ x_3 = a + r\sqrt{5}$$

care sînt în progresie aritmetică, cu rația $r\sqrt{5}$.

VIII.P.40[1]. Prin substituția $x = t - \frac{\pi}{2}$ integrala:

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx,$$

cînd m este par devine:

$$I_m = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^m t\, dt$$

și, analog:

$$I_m^* = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^m t\, dt.$$

Prin substituția $x = \frac{\pi}{2} - t$:

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^m\left(\frac{\pi}{2} - t\right) d\left(\frac{\pi}{2} - t\right) =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^m t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t\, dt.$$

$$I_m^* = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^m \left(\frac{\pi}{2} - t\right) d\left(\frac{\pi}{2} - t\right) =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^m t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \, dt$$

deci:

$$I_m = I_m^*, \ (\forall) m \in N.$$

Avem:

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \, d(\cos x)$$

pe care o integrăm prin părți, cu $u = \sin^{m-1} x$, $dv = d(\cos x)$ deci $v = \cos x$ astfel că putem scrie:

$$I_m = -\cos x \sin^{m-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx =$$

$$= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx =$$

$$= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \, dx - (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx$$

adică:

$$I_m = (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m$$

sau:

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Pentru $m = 2n$, $n \in N$, avem:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0, \ I_4 = \frac{3}{4} I_2, \ \ldots, \ I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$$

și cum $I_0 = \frac{\pi}{2}$, rezultă că:

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \frac{\pi}{2}.$$

Să arătăm că:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} = 0$$

deci $\lim_{n \to +\infty} I_{2n} = 0$.

Evident, avem:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \quad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}; \dots; \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}.$$

Înmulțind aceste inegalități, membru cu membru, obținem:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n+1}$$

Înmulțind ambii membri ai acestei ultime inegalități cu $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n}$, găsim:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} \right)^2 < \frac{1}{2n+1}$$

adică:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

de unde se vede că:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} = 0$$

deci și:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = 0.$$

VIII.P.41[3]. Cu substituția $f(x) = xg(x)$ relația din ipoteză devine:

$$|f'(x)| \leqslant \mu < 1$$

iar cea de concluzie $f(c) = c$, c unic.

Fie $h(x) = x - f(x)$, $(\forall)x \in R$ și $x_n = h(n)$, $(\forall)n \in Z$.

Evident, conform teoremei *Lagrange*:

$x_{n+1} - x_n = 1 - [f(n+1) - f(n)] = 1 - f'(\xi_n) \geqslant 1 - \mu$, unde $\xi_n \in (n, n+1)$ deci:

$$x_{n+1} > \gamma + x_n, \quad (\forall)\, n \in Z$$

unde $\gamma = 1 - \mu > 0$. De aici:

$$x_{n+1} \geqslant \gamma n + x_1, \quad (\forall)n \in N$$

deci:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty,$$

și analog:

$$\lim_{n \to +\infty} x_{-n} = -\infty.$$

Ca atare, h ia valori și pozitive și negative și h fiind continuă (f este continuă ca produs de funcții continue — g fiind derivabilă, este continuă — h este continuă ca diferență de funcții continue) și există $c \in R$ astfel încît $h(c) = 0$ deci există $c \in R$ astfel ca $f(c) = c$. Să admitem că ar mai exista un $c_1 \in R$ astfel ca $f(c_1) = c_1$. Atunci, conform teoremei *Lagrange*:

$$|c - c_1| = |f(c) - f(c_1)| = |c_1 - c_1|\, f'(\varsigma)$$

unde $\varsigma \in (c, c_1)$ (dacă $c < c_1$, analog pentru $c_1 < c$) adică:

$$|c - c_1| \leqslant \mu\, |c - c_1|$$

adică $\mu \geqslant 1$, absurd (contrar ipotezei). Rezultă, în definitiv, afirmația din enunț.

VIII.P.42[1]. Fie:

$$a_n = 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}.$$

Atunci:

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{48}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$$

de unde, prin inducție:

$$\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{n\text{ radicali}}=2\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}.$$

Ca atare:

$$\lim_{n\to+\infty}2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{n\text{ radicali}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\sin\frac{\pi}{3}x=\frac{2\pi}{3}.$$

VIII.P.43. Pentru $x\in(-1,\ 1)$:

$$\varphi(x)=\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt-$$

$$-\int_0^x\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt-\int_0^x\sqrt{1-t^2}\,dt=$$

$$=\left(\arcsin\ t-\frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\ t\right)\Bigg|_0^x=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\arcsin\ x-x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Se observă că pentru $x \in (-1, 1)$, funcția φ este continuă iar pentru punctele $x = -1$ și $x = 1$ avem:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1}{2} (\arcsin x - x \sqrt{1 - x^2}) =$$

$$= -\frac{\pi}{4} = \varphi(-1),$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1}{2} (\arcsin x - x \sqrt{1 - x^2}) =$$

$$= \frac{\pi}{4} = \varphi(1)$$

deci φ este continuă pe tot intervalul $[-1, 1]$.

Derivata $\varphi'(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ există pentru orice $x \in (-1, 1)$ dar devine infinită pentru $x = -1$, respectiv $x = 1$. Deci în aceste puncte, funcția φ nu este derivabilă.

VIII.P.44. a°). $z' = -\dfrac{2}{1 + x^2}$

iar:

$$y' = \begin{cases} \dfrac{2}{1 + x^2} & \text{pentru } x > 0 \\ -\dfrac{2}{1 + x^2} & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

deci pentru $x < 0$, $y' = z'$ deci $y - z = \text{const.}$

b°). Pentru $x = -1$, $y(-1) = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$ și $z(-1) = -2 \operatorname{arctg}(-1) = \dfrac{\pi}{2}$ deci constanta este 0, adică funcțiile sînt egale sau diferă, lucrînd cu perioade, prin $2k\pi$, $k \in Z$.

VIII.P.45*. Facem convenția ca $\sqrt[1]{x} = x$ astfel ca pentru $k = 1$ integrala să aibă sens. Cu schimbarea de variabilă $x = 2^k y$ obținem $dx = 2^k dy$ astfel că:

$$I = 2^k \int \sqrt{1 + \sin 2\sqrt[k]{y}}\, dy = 2^k \int |\sin \sqrt[k]{y} +$$

$+ \cos \sqrt[k]{y}|\, dy$ (pentru existența radicalului $\sqrt[k]{x}$, pentru toți k, evident $x > 0$ deci și $y > 0$).

Pentru a calcula integrala, în această nouă formă, să calculăm:

$$\begin{cases} I_{1,k} = \int \sin \sqrt[k]{y}\, dy \\ I_{2,k} = \int \cos \sqrt[k]{y}\, dy \end{cases} \tag{1}$$

Facem substituția $y = t^k \Leftrightarrow t = \sqrt[k]{y}$ (2)

și (1) devine:

$$\begin{cases} I_{1,k} = k \int t^{k-1} \sin t\, dt \\ I_{2,k} = k \int t^{k-1} \cos t\, dt \end{cases} \tag{3}$$

Integralele (3) le calculăm prin părți:

$$I_{1,k} = k \int t^{k-1} \sin t\, dt = -k \int t^{k-1} d(\cos t) =$$

$$= -k[t^{k-1} \cos t - \int (k-1) t^{k-2} \cos t\, dt].$$

Se observă că, respectiv:

$$(k-1) \int t^{k-2} \cos t\, dt = I_{2,k-1}$$

deci:

$$I_{1,k} = k(I_{2,k-1} - t^{k+1} \cos t).$$

Analog pentru $I_{2,k}$ astfel că obținem formulele:

$$\begin{aligned} I_{1,k} &= k(I_{2,k-1} - t^{k-1} \cos t) \\ I_{2,k} &= k(t^{k-1} \sin t - I_{1,k-1}) \end{aligned} \tag{4}$$

Trecem la micşorarea lui k respectiv cu o unitate şi obţinem:

$$I_{1,k-1} = (k-1)\,(I_{2,k-2} - t^{k-2}\cos t)$$
$$I_{2,k-1} = (k-1)\,(t^{k-2}\sin t - I_{1,k-2}) \tag{5}$$

care, înlocuite în (4), dau:

$$I_{1,k} + k(k-1)\,I_{1,k-2} = kt^{k-2}[(k-1)\sin t - t\cos t] \tag{6}$$
$$I_{2,k} + k(k-1)I_{2,k-2} = kt^{k-2}[(k-1)\cos t + t\sin t].$$

Dăm în (6) lui k valorile:

$$k = 4, 6, 8, \ldots, 2m, \ldots; \qquad m \geqslant 2, \tag{7}$$

respectiv:

$$k = 5,\ 7,\ 9, \ldots, 2m+1\ldots$$

şi obţinem:

$$I_{1,4} + 4\cdot 3\,I_{1,2} = 4t^2(3\sin t - t\cos t)$$
$$I_{1,6} + 6\cdot 5\,I_{1,4} = 6t^4(5\sin t - t\cos t)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_{1,2m} + 2m(2m-1)I_{1,2m-2} = 2mt^{2m-2}[(2m-1)\sin t - t\cos t] \tag{8}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_{2,4} + 4\cdot 3\,I_{2,2} = 4t^2(3\cos t + t\sin t)$$
$$I_{2,6} + 6\cdot 5 I_{2,4} = 6t^4(5\cos t + t\sin t)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_{2,2m} + 2m(2m-1)I_{2,2m-2} = 2mt^{2m-2}[(2m-1)\cos t + t\sin t)] \tag{9}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_{1,5} + 5\cdot 4I_{1,3} = 5t^3(4\sin t - t\cos t)$$
$$I_{1,7} + 7\cdot 6I_{1,5} = 7t^5(6\sin t - t\cos t)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_{1,\,2m+1} + (2m+1)2m\,I_{1,\,2m-1} = (2m+ \\ + 1)t^{2m-1}\,[2m\sin t - t\cos t]$$

.....

$$I_{2,\,5} + 5\cdot 4\,I_{2,\,3} = 5t^3(4\cos t + t\sin t)$$

$$I_{2,\,7} + 7\cdot 6\,I_{2,\,5} = 7t^5(6\cos t + t\sin t)$$

.....

$$I_{2,\,2m+1} + (2m+1)2m\,I_{2,\,2m-1} = (2m+ \\ + 1)t^{2m-1}\,[2m\cos t + t\sin t]:$$

Integralele $I_{1,2}$ şi $I_{2,2}$ se calculează prin părţi şi se obţine:

$$I_{1,\,2} = 2(\sin t - t\cos t) \qquad (10)$$

$$I_{2,\,2} = 2(\cos t + t\sin t).$$

Ţinînd seama de (10), din (8) se obţine:

$$I_{1,\,4} = -4\cdot 3\cdot 2(\sin t - t\cos t) + 4t^2(3\sin t - \\ - t\cos t)$$

sau:

$$I_{1,\,4} = -\frac{4!}{1!}\,t^0(1\cdot\sin t - t\cos t) + \frac{4!}{3!}\,t^2(3\sin t - t\cos t).$$

Continuînd în acest mod obţinem pe $I_{1,6}$ şi din aproape în aproape expresia generală a lui $I_{1,2m}$:

$$I_{1,\,2m} = (2m)!\sum_{p=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m+p+1}}{(2p+1)!}\,t^{2p}[(2p+1)\sin t - t\cos t] \qquad (11)$$

care poate fi demonstrată prin inducţie matematică.

Asemănător pentru $I_{2,2m}$:

$$I_{2,2m} = (2m)!\sum_{p=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m+p+1}}{(2p+1)!}\,t^{2p}[(2p+1)\cos t + t\sin t]. \qquad (12)$$

Din relația (4), avînd în vedere (10):

$$I_{1,3} = 3(2\cos t + 2t\sin t - t^2\cos t) = 3\cdot 2\cos t +$$

$$3t(2\sin t - t\cos t) = \frac{3!}{0!}t^{-1}(0\cdot\sin t - t\cos t) +$$

$$+\frac{3!}{2!}t(2\sin t - t\cos t).$$

Continuînd în același mod în (9) obținem expresia lui $I_{1,5}$ și din aproape în aproape expresia generală a lui $I_{1,2m+1}$:

$$I_{1,2m+1} = (2m+1)!\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^{m+p}}{(2p)!}t^{2p-1}[2p\sin t - t\cos t]. \quad (13)$$

Analog:

$$I_{2,2m+1} = (2m+1)!\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^{m+p}}{(2p)!}t^{2p-1}[2p\cos t + t\sin t]. \quad (14)$$

Prin explicitarea modulului $|\sin t + \cos t|$ se obține soluția problemei, fapt ce îl lăsăm pe seama cititorului.

VIII.P.46. Fie:

$$g(x_1) = \min_{x\in[a,b]} g(x) < g(x_2) = \max_{x\in[a,b]} g(x),$$

$x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$ (deoarece g este neconstantă). Funcția g are proprietatea lui *Darboux* (fiind o funcție continuă) deci există $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1} \in [a, b]$ astfel ca $g(x_1) < g(c_1) < g(c_2) < \ldots < g(c_{n+1}) < g(x_2)$ unde n este gradul polinomului f. Fie $a_i = g(c_i)$, $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. În condițiile problemei, $f(a_i) = 0$, $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Polinomul f se anulează însă în $n+1$ puncte distincte din R, pe cînd gradul său este n, deci este identic nul.

VIII.P.47. Considerăm $x_1,\ x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ și $x_2 > x_1$.

Vom demonstra că și $f(x_2) > f(x_1)$.

Fie $g_{x_i}(t) = \frac{\sin x_i t}{t}$, $i \in \{1, 2\}$. Evident:

$$g_{x_2}(t) - g_{x_1}(t) = \frac{\sin x_2 t - \sin x_1 t}{t} =$$

$$= \frac{2}{t} \cos \frac{(x_1 + x_2)t}{2} \sin \frac{(x_2 - x_1)t}{2},$$

dar:

$$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{4},\ 0 < \frac{x_1 + x_2}{2} t < \frac{\pi}{2} \text{ (căci } t \in [1, 2]);$$

$$0 < \cos \frac{(x_1 + x_2)t}{2} < 1 \text{ și } 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{8},$$

$$0 < \frac{(x_2 - x_1)t}{2} < \frac{\pi}{4},$$

$$0 < \sin \frac{(x_2 - x_1)t}{2}$$

deci:

$$g_{x_2}(t) - g_{x_1}(t) > 0$$

adică:

$$\int_1^2 (g_{x_2}(t) - g_{x_1}(t))\mathrm{d}t > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

VIII.P.48. Cu substituția $v = x - 1$, integrala devine:

$$I = \int \frac{x(2x^2 - 3)\,\mathrm{d}x}{(x^4 - 3x^2 + 2)(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{2 - x^2})}.$$

Înmulțind numitorul și numărătorul cu conjugatul numitorului, observînd că $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$, integrala I devine:

$$(1)\quad I = \int \frac{x(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{2-x^2})}{(x^2-1)(x^2-2)}\,dx =$$

$$= \int \frac{x\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)(x^2-2)}\,dx - \int \frac{x\sqrt{2-x^2}}{(2-x^2)(x^2-1)}\,dx =$$

$$= \int \frac{x\,dx}{(x^2-2)\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{2-x^2}}, \qquad (1)$$

reducînd astfel calculul integralei propuse la două integrale de tip cunoscut.

VIII.P.49.

a°). $I_1 = \int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 -$

$$- \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi - 2}{4}.$$

$$I_2 = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 -$$

$$- 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \ln 2 - 2x \Big|_0^1 + 2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 =$$

$$= \ln 2 + \frac{\pi - 4}{2}.$$

b°). Să considerăm funcția h definită prin:

$$h(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2);$$

derivînd:

$$h'(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2} \text{ și } h''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Deoarece pentru orice $x \in (0, 1]$, $h''(x) \geqslant 0$, rezultă că h' este crescătoare (strict) pe $[0, 1]$. Deoarece $h'(0) = 0$, rezultă că pentru orice $x \in [0, 1]$, $h'(x) \geqslant 0$ și deci h este crescătoare pe $[0, 1]$. Deoarece $h(0) = 0$, rezultă că pentru orice $x \in [0, 1]$, avem $h(x) \geqslant 0$, deci, pentru orice $x \in [0, 1]$, $f(x) \geqslant g(x)$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \ln(1 + x^2)$.

VIII.P.50. Analizăm șirul a_n:

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \operatorname{arctg} \frac{k}{n} + \frac{\pi}{4n}$$

și trecînd la limită:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{\pi - 2}{4}.$$

Analog pentru șirul b_n:

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \ln \left(\frac{k^2}{n^2} + 1 \right)$$

deci:

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \int_0^1 \ln(1 + x^2) \, dx = \frac{\pi - 4}{2} + \ln 2.$$

VIII.P.51[1]. Fie d o diviziune a intervalului $[a, b]$, $d: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ cu $x_{k+1} - x_k = \frac{b - a}{n}$, $k \in \{0, \ldots, n - 1\}$. Deoarece funcția f definită prin $f(x) = \frac{1}{x - t}$ este, pe $[a, b]$, integrabilă, fie F o primitivă a lui $f: f(x) = F'(x)$, $(\forall) x \in [a, b]$.

Pe fiecare interval $[x_k, x_{k+1}]$ aplicăm funcției F teorema lui *Lagrange:*

există:

$$\xi_k \in (x_k, x_{k+1}) = \left(k \frac{b - a}{n} + a_0, \; (k + 1) \frac{k - a}{n} + a_0 \right)$$

astfel încît:

$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$.

Făcînd $k = 0, 1, \ldots, n-1$ și adunînd, avînd în vedere că $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$ găsim:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \frac{b-a}{n}$$

adică:

$$\frac{1}{\xi_0 - t} + \ldots + \frac{1}{\xi_{n-1} - t} = \frac{n}{b-a}(F(b) - F(a)) =$$

$$= \frac{n}{b-a} \ln \left| \frac{b-t}{a-t} \right|.$$

VIII.P.52. Fie $r > 0$ rația progresiei aritmetice. Succesiv:

$$a_n = \frac{1}{b_1^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{b_k^2} < \frac{1}{b_1^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{b_k^2 - r^2} = \frac{1}{b_1^2} +$$

$$+ \frac{1}{2r} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{b_k - r} - \frac{1}{b_k + r} \right) = \frac{1}{b_1^2} +$$

$$+ \frac{1}{2r} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{b_{k-1}} - \frac{1}{b_{k+1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right).$$

În felul acesta:

$$0 < a_n < \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right);$$

adică șirul $(a_n)_{n \in N^*}$ este mărginit. Cum șirul este și monoton (strict crescător) rezultă că el este convergent.

VIII.P.53. Succesiv:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{k}}\left(\frac{\operatorname{ctg} t}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}}\right)^{\operatorname{ctg} kt}=\lim_{t\to\frac{\pi}{k}}\left[1+\frac{\operatorname{ctg} t-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}}\right]^{\operatorname{ctg} kt}=$$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{k}}\left(1+\frac{\operatorname{ctg} t-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}}\right)^{\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}}{\operatorname{ctg} t-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}}\cdot\frac{\left(\operatorname{ctg} t-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}\right)\operatorname{ctg} kt}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{k}}\frac{\operatorname{ctg} kt\left(\operatorname{ctg} t-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}\right)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}}}=e^{\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{k}}\operatorname{ctg} kt\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{k}-t\right)}{\sin t\sin\frac{\pi}{k}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{k}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{k}}\frac{\cos kt}{\sin t\cdot\cos\frac{\pi}{k}}\cdot\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{k}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{k}-t\right)}{\sin kt}}=e^{-\frac{2}{k\sin\frac{2\pi}{k}}}.$$

VIII.P.54. Succesiv:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{4n-k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4\frac{k}{n}-\frac{k^2}{n^2}}}=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-(x^2-4x+4)}}=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{2\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}=\int_0^1\frac{d\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}=$$

$$=\arcsin\frac{x-2}{2}\Big|_0^1=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin(-1)=\frac{\pi}{3}.$$

VIII.P.55[1]. Să considerăm limita:

$$k_n = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^n \beta - \prod_{k=1}^{n} \sin(\beta + kx)}{\cos^n \beta - \prod_{k=1}^{n} \cos(\beta + kx)}, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z. \tag{1}$$

Fie:

$$t_n = \lim_{x\to 0} \frac{\prod_{k=1}^{n} \sin(\beta + kx) - \sin^n \beta}{x} \tag{2}$$

$$t'_n = \lim_{x\to 0} \frac{\prod_{k=1}^{n} \cos(\beta + kx) - \cos^n \beta}{x}.$$

Folosind regula lui *l'Hospital* obținem că aceste limite au valoarea:

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} \sin^{n-1} \beta \cos \beta, \tag{3}$$

$$t'_n = -\frac{n(n+1)}{2} \cos^{n-1} \beta \sin \beta, \tag{4}$$

astfel că obținem:

$$k_n = -\operatorname{tg}^{n-2} \beta.$$

Pentru $\beta = \frac{\pi}{4}$, după oarecare calcule, obținem că limita din enunț are valoarea -1.

VIII.P.56. Făcînd $x \to -x$ obținem:

$$f(x^2) + f(x) = 2f(-x)$$

și scăzînd membru cu membru relațiile, rezultă $f(-x) = f(x)$ adică funcția f este pară și de aici, $f(x^2) = f(x)$. Putem considera, în raționamentele următoare, că

$x \geqslant 0$, deoarece $f(-x) = f(x)$. Din $f(x^2) = f(x)$ deducem, prin iterare, $f(x) = f(x^{2^n})$, $(\forall) n \in N$. Dacă $x \in [0, 1)$ atunci, trecînd la limită după n:

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x^{2^n}) = f(\lim_{n \to +\infty} x^{2^n}) = f(0) = c_1$$

deoarece f este continuă. Dacă $x \in [1, +\infty)$ atunci $f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)$ și analog $f(x) = c_2$ pentru $x \in [1, +\infty)$, c_1 și c_2 fiind constante. Cum f este continuă rezultă $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x)$ deci $c_1 = c_2$ adică funcția f este constantă.

VIII.P.57[1]. Fie $x = a$ și $x = b$ cele două axe de simetrie.
Putem scrie:

$$f(a - x) = f(a + x),$$

și:

$$f(b - x) = f(b + x).$$

Punînd $y = a - x$ respectiv $y = b - x$ obținem:

$$x = a - y$$

adică:

$$x + a = 2a - y$$

deci:

$$f(a - x) = f(y) = f(a + x) = f(2a - y)$$

respectiv:

$$f(b - x) = f(y) = f(b + x) = f(2b - y)$$

deci:

$$f(y) = f(2a - y) = f(2b - y).$$

Punînd, în final $y = 2a - z$ obținem:

$$f(z) = f[2(b - a) + z]$$

ceea ce arată că f are perioada $2(b - a)$.

VIII.P.58[1]. Ecuația se mai scrie:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{y}\right)=\left[1-\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\right].$$

Făcînd $\frac{x^2}{y}=z$, rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}z}{1-z^2}=\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2},$$

care se rezolvă prin integrare.

Altfel: fie $\varphi: I\subset R\to R$ soluție a ecuației diferențiale propuse, adică:

1°). φ este derivabilă,

2°). $x^2(x^2-1)\varphi'(x)=\varphi^2(x)+2x(x^2-1)\varphi(x)-x^4$.

Recunoaștem în ecuația propusă o ecuație *Riccati* pentru care există formulă de rezolvare în cazul în care se cunoaște o soluție particulară.

Dacă o astfel de soluție nu se poate determina, ecuația nu poate fi, în general, rezolvată prin cuadraturi (fapt demonstrat de *Liouville*).

VIII.P.59[2]. Ecuația caracteristică este:

$$\lambda^3+4\lambda-5=0$$

adică:

$$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+5)=0$$

cu soluțiile:

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{19}}{2},\quad \lambda_3=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{19}}{2},$$

de unde:

$$y=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{x\sqrt{19}}{2}+c_3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{x\sqrt{19}}{2},$$

c_1, c_2, c_3 fiind constante oarecare, reale.

VIII.P.60². Succesiv:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2m}x \sin^{2n+1}x \, dx = \int_0^{\pi} \cos^{2m}x \sin^{2n+1}x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos^{2m}x \sin^{2n+1}x \, dx.$$

Pentru integrala $\int_{\pi}^{2\pi} \cos^{2m}x \sin^{2n+1}x \, dx$, facem $x = t + \pi$ și obținem:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos^{2m}x \sin^{2n+1}x \, dx = \int_0^{\pi} \cos^{2m}(t+\pi) \sin^{2n+1}(t+\pi) \, dt =$$
$$= -\int_0^{\pi} \cos^{2m}x \sin^{2n+1}x \, dx$$

astfel că:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2m}x \sin^{2n+1}x \, dx = 0.$$

VIII.P.61². Raționăm prin inducție matematică. Pentru $n = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg} a}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos(a+x) \cos a} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos a \cos(a+x)} = \frac{1}{\cos^2 a} =$$
$$= 1 + \operatorname{tg}^2 a.$$

Pentru $n = 2$, fie:

$$E = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x+a) \operatorname{tg}(a+2x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}.$$

Notăm:

$$E_1 = \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg} a}{x}$$

$$E_2 = \frac{\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a+2x) - \operatorname{tg}^2 a}{x}$$

Evident:

$$\lim_{x\to 0}[E_2 - E_1 \operatorname{tg}(a+2x)] = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(a+2x) - \operatorname{tg}^2 a}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \operatorname{tg} a \cdot \frac{\sin 2x}{x \cos a \cos(a+2x)} = 2 \operatorname{tg} a\,(1 + \operatorname{tg}^2 a),$$

deci:

$$\lim_{x\to 0} E_2 = \operatorname{tg} a(1 + \operatorname{tg}^2 a) + 2 \operatorname{tg} a\,(1 + \operatorname{tg}^2 a) =$$

$$= 3 \operatorname{tg} a(1 + \operatorname{tg}^2 a).$$

Analog:

$$\lim_{x\to 0} E_3 = \lim_{x\to 0}[E_2 \cdot \operatorname{tg}(a+3x)] + 3 \operatorname{tg}^2 a(1 + \operatorname{tg}^2 a) =$$

$$= 6 \operatorname{tg}^2 a(1 + \operatorname{tg}^2 a).$$

Presupunem $\lim_{x\to 0} E_n = \frac{n(n+1)}{2} \operatorname{tg}^{n-1} a(1 + \operatorname{tg}^2 a)$ şi obţinem:

$$\lim_{x\to 0} E_{n+1} = \lim_{x\to 0} E_n \operatorname{tg}[a + (n+1)x] +$$

$$+ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^n a \sin(n+1)x}{x \cos a \cos[a+(n+1)x]} =$$

$$= (n+1)\operatorname{tg}^n a(1 + \operatorname{tg}^2 a) + \frac{n(n+1)}{2} \operatorname{tg}^n a(1 + \operatorname{tg}^2 a) =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \operatorname{tg}^n a(1 + \operatorname{tg}^2 a).$$

GEOMETRIE ANALITICĂ

IX.1.0. Definiții și propoziții.

În această secțiune a lucrării, toate elementele le vom considera, un afara specificării exprese a contrariului, într-un sistem rectangular de axe xOy.

Lungimea și orientarea unui segment pe axa $x'Ox$ sînt date de diferența dintre abscisa extremității și abscisa originii segmentului (are loc relația lui *Chasles*: dacă $A(a)$ și $B(b)$sînt două puncte pe o axă, atunci $\overline{AB} = b - a$; $\overline{BA} = a - b$ și deci:

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0).$$

IX.1.1. *Teorema lui Chasles.* Fiind date n puncte pe o dreaptă, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, există relația:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1} = 0.$$

IX.1.2. *Puncte conjugate armonic.* Patru puncte situate pe o axă sînt *conjugate armonic* dacă între coordonatele lor, x_1, x_2, x_3, x_4, există relația:

$$2(x_1x_2 + x_3x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$

punctele fiind $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$, $P_3(x_3)$ și $P_4(x_4)$, punctele pe axă fiind situate în ordinea O, P_1, P_3, P_2, P_4, relația de mai sus deducîndu-se din definiție (considerînd segmentele orientale — vezi V.1.7).

Dacă punctul P_4 coincide cu originea fixată pe axă atunci relația se scrie:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{x_3}$$

și x_3 este media armonică a numerelor x_1 și x_2.

IX.1.3. Pentru plan, sistemul de referință este cel cartezian, oblic sau rectangular. În general se folosește sistemul cartezian rectangular.

IX.1.4. *Distanța* între punctele $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ este:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

IX.1.5. *Înclinarea* segmentului P_1P_2 față de axa Ox este dată de:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

IX.1.6. Coordonatele punctelor P_3 și P_4 care împart segmentul P_1P_2 în același raport $k > 0$ sînt:

$$x_3 = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y_3 = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}$$

$$x_4 = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y_4 = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}$$

(se ține seama de orientarea segmentelor).

IX.1.7. Punctele $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$ situate pe aceeași dreaptă în planul sistemului de referință formează o diviziune armonică dacă:

$$\frac{\overline{P_2P_1}}{\overline{P_2P_3}} + \frac{\overline{P_4P_1}}{\overline{P_4P_3}} = 0$$

și deci:

$$\begin{cases} 2(x_1x_2 + x_3x_4) - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0 \\ 2(y_1y_2 + y_3y_4) - (y_1 + y_2)(y_3 + y_4) = 0. \end{cases}$$

IX.1.8. *Centrul de greutate* al unui triunghi ABC cu vîrfurile $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ are coordonatele:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

IX.2.0. Ecuația unei drepte.

1°). Ecuația generală: $Ax + By + C = 0$.

2°). Ecuația explicită: $y = mx + n$

unde m este coeficientul director ($m = \operatorname{tg} \alpha$) și n este ordonata la origine.

3°). Ecuația prin tăieturi: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$.

4°). Ecuația normală: $x \cos \varphi + y \sin \varphi - d = 0$, $d = a \sin \varphi$.

5°). Ecuația dreptei care trece prin (x_0, y_0) și are m dat:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

6°). Ecuația dreptei care trece prin punctele (x_1, y_1), (x_2, y_2) este:

a°). $\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$ cu $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ sau:

b°). $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$;

$y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2)$ sau încă:

c°). $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În fiecare ecuație, (x, y) reprezintă coordonatele unui punct curent (oarecare) de pe dreaptă.

7°). Ecuația dreptei care trece prin origine este:

$$y = mx \text{ (sau } Ax + By = 0).$$

$y = b$; $x = a$ sînt ecuațiile dreptelor paralele cu axele sistemului.

IX.2.1. Distanța de la punctul (x_0, y_0) la dreapta:

$$Ax + By + C = 0$$

este:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

IX.2.2. *Două drepte* $D_1 \equiv Ax + By + C = 0$ și $D_2 \equiv A'x + B'y + C' = 0$, raportate la același sistem de referință pot fi:

secante cînd $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ $(m \neq m')$;

paralele cînd $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ $(m = m',\ n \neq n')$;

confundate cînd $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ $(m = m'$ și $n = n')$.

IX.2.3. *Ecuația fasciculului* care are drept vîrf punctul de intersecție al dreptelor:

$D \equiv Ax + By + C = 0,\quad D' \equiv A'x + B'y + C' = 0$

este:

$D + \lambda D' = 0$ sau $Ax + By + C + \lambda(A'x + B'y + C') = 0,$

unde λ este un parametru oarecare.

Dacă unul sau mai mulți coeficienți din ecuația unei drepte depind de un parametru, ecuația reprezintă o mulțime de drepte care pot trece printr-un punct fix. Ecuația:

$$(\lambda + 2)x - 3(\lambda + 1)y - 3(1 + \lambda) = 0,$$

generează drepte care trec prin punctul $(0, -1)$.

Punctul fix prin care trec dreptele se poate determina astfel:

— se scrie ecuația astfel încît parametrul λ să figureze separat (sub forma $A(x, y) + \lambda B(x, y)$):

$$(2x - 3y - 3) + \lambda(x - 3y - 3) = 0,$$

— se rezolvă sistemul obținut prin anularea celor două paranteze $(A(x, y) = 0,\ B(x, y) = 0)$.

Observație. Dacă înlocuim parametrul, succesiv prin valorile care anulează coeficienții lui x respectiv y, se obține un sistem simplu:

$\lambda = -2 \Rightarrow 3y + 3 = 0$ și deci $y = -1$

$\lambda = -1 \Rightarrow \quad x \quad = 0$ și deci $x = \ 0.$

Vîrful fasciculului este $(0, -1)$.

IX.2.4. *Condiția ca trei drepte* de ecuații:

$$Ax + By + C = 0,$$

$$A'x + B'y + C' = 0 \text{ și } A''x + B''y + C'' = 0$$

să fie concurente este:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

IX.2.5. *Condiția de perpendicularitate* a dreptelor $y = m_1x + n_1$ și $y = m_2x + n_2$ este:

$$m_1m_2 + 1 = 0 \left(\text{sau } m_2 = -\frac{1}{m_1}\right), \; m_1 \neq 0,$$

iar dacă dreptele sînt date prin ecuațiile:

$$Ax + By + C = 0 \text{ și } A'x + B'y + C' = 0,$$

atunci:

$$m_1 = -\frac{A}{B}, \; m_2 = -\frac{A'}{B'}$$

și condiția se scrie $AA' + BB' = 0$ (în ipoteza $BB' \neq 0$).

IX.2.6. *Unghiul ascuțit u al dreptelor de ecuații*:

$$y = m_1x + n_1, \; y = m_2x + n_2$$

este dat de:

$$\operatorname{tg} u = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \right| \left(\text{sau } \operatorname{ctg} u = \left| \frac{1 + m_1m_2}{m_1 - m_2} \right|\right).$$

IX.2.7. *Ecuațiile bisectoarelor* unghiurilor formate de dreptele de ecuații: $Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$ sînt:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

IX.2.8. *Aria triunghiului* cu vîrfurile în punctele (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) se calculează folosind formula:

$$A = \varepsilon \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ unde } \varepsilon = \pm 1 \text{ și } A > 0.$$

IX.2.9. *Condiția de coliniaritate* a punctelor $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ este:

$$\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

IX.2.10. *Separarea planului în regiuni.* Dreapta de ecuație $Ax + By + C = 0$ împarte planul xOy în două regiuni; una cuprinde originea și o numim R_0.

Oricare ar fi punctul (x_0, y_0) din originea R_0, numărul $Ax_0 + By_0 + C$ are semnul lui C.

Oricare ar fi punctul (x_1, y_1) din cea de a doua regiune, numărul $Ax_1 + By_1 + C$ are semn contrar lui C, deci:

$$(Ax_0 + By_0 + C) \cdot C > 0$$

și respectiv:

$$(Ax_1 + By_1 + C) \cdot C < 0$$

IX.3.0. Conice.

1°). $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ este ecuația cercului de rază r și cu centrul în originea sistemului cartezian rectangular.

2°). $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, $C(a, b)$, $r^2=a^2+b^2-c$ sau $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$, $C(a, b)$, r,

$x^2+y^2+mx+ny+p=0$, $C\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$, $r^2=\frac{m^2+n^2}{4} - p$ reprezintă ecuațiile cercurilor cu centrele C și raza r.

3°). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ este ecuația redusă a elipsei.

4°). $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ este ecuația redusă a hiperbolei.

(Dacă $a = b$, hiperbola are ecuația $x^2 - y^2 - a^2 = 0$ și se numește hiperbolă echilateră).

5°). $y^2 = 2px$ este ecuația redusă a parabolei.

6°). $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, reprezintă ecuația unei conice oarecare.

IX.4.0. Probleme de tangență.

Tangenta într-un punct (x_0, y_0) al conicei:

1°). $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (ecuația cercului) este:

$$x_0x + y_0y - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0;$$

și:

2°). $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0$; 3°). $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0$;

4°). $y_0y = p(x + x_0)$,

respectiv pentru elipsă, hiperbolă, parabolă de ecuații:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad y^2 = 2px.$$

IX.4.1. *Ecuațiile tangentelor* la conicele precedente, paralele cu o direcție m(păstrînd notațiile de la punctul precedent), sînt:

1°). $y - y_0 = m(x - x_0) \pm r\sqrt{1 + m^2}$;

2°). $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$;

3°). $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$;

4°). $y = mx + \frac{p}{2m}$.

IX.4.2. Ecuațiile tangentelor duse dintr-un punct (x_0, y_0) la o conică se obțin astfel:

— se scrie ecuația tangentei paralelă cu o direcție arbitrară m.

— se pune condiția ca ecuația precedentă să fie verificată de coordonatele (x_0, y_0), și se obține ecuația care furnizează valorile lui m.

— se scrie ecuația dreptei care trece prin (x_0, y_0) și are coeficientul director m.

IX.5.0. Proprietăți locale ale conicelor.

a°). Tangenta și normala în același punct la elipsă sînt bisectoare ale unghiurilor formate de razele vectoare corespunzătoare punctului.

b°). Izogonala razei vectoare corespunzătoare unui punct al elipsei în raport cu normala în acel punct este cealaltă rază vectoare.

Proprietățile rămîn valabile pentru hiperbolă, înlocuind cuvîntul tangentă prin normală și reciproc.

c°). Simetricul unui focar (la elipsă sau hiperbolă) în raport cu o tangentă variabilă este cercul cu centrul în celălalt focar și de rază $2a$ (conform notațiilor de la IX.4.0.).

d°). Proiecția oricărui focar pe o tangentă variabilă este cercul cu centrul în centrul conicei și de rază a.

e°). Raportul distanțelor unui punct la un focar și la directoarea corespunzătoare focarului este constant și anume: subunitar pentru elipsă, supraunitar pentru hiperbolă și egal cu unitatea pentru parabolă.

f°). Tangenta la hiperbolă într-un punct oarecare determină cu asimptotele ramurei pe care se găsește punctul, un triunghi de arie constantă.

IX.6.0. Locuri geometrice.

Mulțimea punctelor din plan cu o anumită proprietate formează o curbă (sau un arc de curbă) căreia îi corespunde o ecuație carteziană.

Locurile geometrice rezultă din deplasarea unui punct care satisface o relație geometrică (metrică, de poziție etc.) sau din schimbarea poziției punctului de intersecție a două curbe variabile.

În rezolvarea unei probleme de loc geometric se procedează în general astfel:

a°). *Elementele date în problemă nu sînt raportate la un sistem de referință.* În acest caz:

— se alege sistemul de referință în așa fel încît elementelor geometrice date să le corespundă ecuații cît mai simple;

— se traduce analitic condiția (sau condițiile) impusă punctului care descrie locul geometric;

— se verifică dacă mulțimea punctelor corespunzătoare ecuației obținute se confundă cu mulțimea punctelor care satisfac condiția impusă locului geometric;

— se elimină eventual soluțiile străine — se cercetează dacă nu există puncte singulare (coordonatele lor nu satisfac ecuația obținută pentru locul geometric) dar satisfac condiția impusă.

b°). *Elementele de referință sînt date prin coordonate numerice sau ecuații cu coeficienți numerici;* în acest caz, se consideră elementele geometrice raportate la sistemul cartezian rectangular și apoi se procedează la fel ca în cazul precedent.

IX.6.1. Se consideră în plan un patrulater $ABCD$, astfel încît $AB = CD$. Să arătăm că locul geometric al punctelor care satisfac relația:

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$$

este mediatoarea segmentului care unește mijloacele laturilor egale.

Fie pentru aceasta $M(x, y)$ punctul care descrie locul geometric și $(0, 0)$, $(0, a)$, (b, c), (d, m) coordonatele punctelor A, B, C, D.

Traducerea analitică a condiției pe care o verifică M de coordonate (x, y) este:

$$x^2 + y^2 + x^2 + (y - a)^2 = (x - b)^2 + (y - c)^2 + \\ + (x - d)^2 + (y - m)^2 \qquad (1)$$

la care se adaugă cea pe care o verifică punctele A, B, C, D:

$$(b - d)^2 + (c - m)^2 = a^2. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) se obține ecuația:

$$(b + d)x - (a - m - c)y - (bd + mc) = 0. \qquad (3)$$

Ecuația este verificată de coordonatele punctului I, $I\left(\frac{b + d}{4}, \frac{a + m + c}{4}\right)$.

Coeficientul director al dreptei date prin ecuația (3) este invers și de semn schimbat coeficientului director al dreptei PQ.

Verificare. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct al locului geometric. Aceasta înseamnă că:

$$E = [(b + d)x - (a - m - c)y - bd - cm]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0,$$

adică:

$$E = (b + d)x_0 - (a - m - c)y_0 - bd - cm = 0.$$

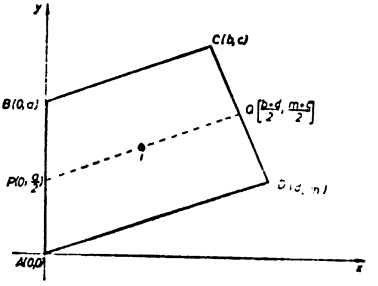


Fig. IX.6.1

Fie:

$$E_1 = M_0A^2 + N_0B^2 = 2x_0^2 + 2y_0^2 + a^2 - 2ay_0,$$
$$E_2 = M_0C^2 + M_0D^2 = 2x_0^2 + 2y_0^2 + b^2 + c^2 + d^2 + m^2 - 2bx_0 - 2cy_0 - 2dx_0 - 2my_0 = E_1 - 2(b + d)x_0 + 2(a - m - c)y_0 + 2bd + 2cm = E_1 - 2E = E_1,$$

deoarece $E = 0$, punctul $M_0(x_0, y_0)$ aparţinînd locului geometric.

Observaţii. 1°). Dacă se alege sistemul format din dreapta ce suportă pe AB — axa absciselor — şi mediatoarea segmentului AB, drept axa ordonatelor, atunci punctele A, B, C, D au coordonatele $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(b, c)$ şi $D(d, m)$ iar ecuaţia locului este:

$$(b + d)x + (m + c)y - bd - mc + \frac{1}{2}a^2 = 0.$$

2°). Dacă se consideră sistemul de referinţă format din mediatoarea segmentului AB ca axă $x'x$, perpendiculara lui C pe $x'x$ ca axă $y'y$ şi deci $A(-a, -b)$, $B(-a, b)$, $C(b, c)$, $D(d, m)$ atunci ecuaţia locului geometric este:

$$(2a + d)x + (m + c)y + a^2 - b^2 = 0,$$

cu condiţia $4b^2 = d^2 + (m - c)^2$.

IX.6.2. Se consideră punctul fix $A \neq 0$ situat pe Ox și o dreaptă (D). Prin A se duce o dreaptă variabilă (Δ) neparalelă cu (D) care taie pe (D) și în M și axa Oy în N. Perpendiculara în N pe Oy intersectează pe OM în L. Se cere locul lui L.

Soluție. Fie A de coordonate $(a, 0)$ (a constant). Dreapta D are ecuația $y = mx + n$ cu m, n constante.

Dreapta variabilă Δ are ecuația $y = \lambda(x - a)$.

Punctul M are coordonatele $x_M = \dfrac{a\lambda + n}{\lambda - m}$, $y_M = \dfrac{ma\lambda + n\lambda}{\lambda - m}$ ce se obțin rezolvînd sistemul:

$$y = \lambda(x - a), \quad y = mx + n.$$

Punctul N are coordonatele $x_N = 0$; $y_N = -a\lambda$.

Perpendiculara în N pe Oy are ecuația $y = -a\lambda$.

Dreapta OM are ecuația: $y = \dfrac{y_M}{x_M} x$; $y = \dfrac{ma\lambda + n\lambda}{a\lambda + n} x$.

Ecuația locului geometric rezultă eliminînd parametrul λ între ecuațiile $y = -a\lambda$ și $y = \dfrac{ma\lambda + n\lambda}{a\lambda + n} x$.

Se obține $(am + n)x - ay + an = 0$.

Observație. Problema se poate rezolva folosind numai condiția de coliniaritate a trei puncte.

IX.6.3. Mulțimea punctelor pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe este constant, este un cerc.

Soluție. Fie într-un sistem xOy punctele fixe date, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$; k fiind constanta și $M(x, y)$ un punct al locului geometric, are loc, potrivit enunțului:

$$MA = kMB$$

sau:

$$(x + a)^2 + y^2 = k^2[(x-a)^2 + y^2]$$

de unde:

$$x^2 + y^2 + 2a\frac{1 + k^2}{1 - k^2} x + a^2 = 0.$$

Obținem în felul acesta un cerc cu centrul pe dreapta AB, care nu taie axa Ox, numit *cercul Apoloniu* al segmentului. De remarcat că, aici, $k \neq 1$; în cazul în care $k = 1$, locul geometric este mediatoarea segmentului AB.

IX.6.4. Uneori, în sprijinul rezolvării analitice a unei probleme, este necesar (și util) să se facă observații folosind cunoștințe de geometrie sintetică.

Punctele fixe A, B, C sînt coliniare.

Cercul variabil care trece prin B și C taie cercul de diametru AB în B și D. Dreapta AD taie cercul variabil în E. Să se afle locul geometric a lui E.

Soluție sintetică. Patrulaterul $BCED$ este înscris și deci $\sphericalangle BDE + \sphericalangle BCE = 180°$. Dar $\sphericalangle BDA = 90°$ (deoarece triunghiul ADB este înscris într-un semicerc). Aceasta înseamnă că $EC \perp AC$ și deci locul geometric este perpendiculara în C pe dreapta ABC.

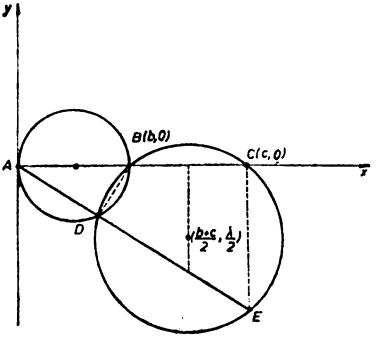


Fig. IX.6.4

Soluție analitică. Fie $\omega\left(\frac{b+c}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$ centrul cercului variabil care trece prin BC, sistemul de referință fiind: AC axa absciselor și perpendiculara în A pe AB, axa ordonatelor, iar $B(b, 0)$, $C(c, 0)$ (vezi fig. IX.6.4).

Ecuația cercului AB este $x^2 + y^2 - bx = 0$.

Ecuația cercului CD este:

$$x^2 + y^2 - (b + c)x - \lambda y + bc = 0.$$

Punctele de intersecție au coordonatele:

$$B(b, 0),\ D\left(\frac{bc^2}{c^2 + \lambda^2}, \frac{bc\lambda}{c^2 + \lambda^2}\right).$$

Ecuația dreptei AD este: $y = \dfrac{\lambda}{c} x.$

Eliminăm parametrul λ între ecuația cercului pe care se găsește punctul E și ecuația dreptei ADE și obținem ecuația:

$$x^3 - (b + c)x^2 + (y^2 + bc)x - cy^2 = 0. \qquad (1)$$

Observație. Dreapta AD taie și cercul AB. Ecuația obținută conține atît ecuația locului descris de punctul D cît și ecuația locului descris de E.

În adevăr, ecuația (1) a locului geometric se poate scrie:

$$(x - c)(x^2 - bx + y^2) = 0.$$

Așadar, locul geometric descris de punctul E este dreapta $x = c$ (perpendiculara în C pe dreapta ABC).

IX.6.5. Să se determine locul geometric al punctului M care are puterile la două cercuri date într-un raport constant. Să se cerceteze și problema în care se modifică enunțul și se cere ca lungimile tangentelor din M la cele două cercuri să aibă raportul constant.

Soluție. În primul caz, însemnînd prin $C(x, y) = 0$ și $C'(x, y) = 0$ ecuațiile celor două cercuri, p și p' puterile punctului $M(x_0, y_0)$, față de cele două cercuri obținem:

$$\frac{p}{p'} = \frac{C(x_0, y_0)}{C'(x_0, y_0)} = k.$$

Cum (x_0, y_0) este un punct al locului geometric, atunci:

$$C(x, y) - kC'(x, y) = 0$$

și deci locul geometric este un cerc cînd $k \neq 1$ și o dreaptă cînd $k = 1$.

Deci, dacă ecuațiile sînt $C(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ și $C'(x, y) = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$, atunci locul geometric are ecuația:

$$(1 - k)(x^2 + y^2) - 2(a - a'k)x - 2(b - b'k)y + c - c'k = 0, k \neq 1,$$

adică ecuația este un cerc care trece prin punctele de intersecție ale cercurilor date, dacă cele două cercuri sînt secante.

În al doilea caz, se știe că nu se pot construi tangente la un cerc decît dacă punctul este exterior. Dacă cele două cercuri date sînt exterioare, locul geometric este tot un cerc; dacă cercurile sînt secante, locul geometric are aceeași ecuație dar, din cercul corespunzător ecuației se elimină arcul de cerc ce trece prin punctele de intersecție și se află în porțiunea comună a celor două cercuri date.

PROBLEME REZOLVATE

IX.R.1. Să se arate că:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

unde m_a, m_b, m_c sînt medianele triunghiului cu laturile a, b, c.

Soluție. Fie triunghiul ABC cu $BC = a$, $CA = b$ și $AB = c$. Considerînd vîrfurile $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, este suficient să exprimăm pătratul unei mediane:

$$m_a^2 = \left(x_1 - \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{y_2 + y_3}{2}\right)^2,$$

$$4m_a^2 = (2x_1 - x_2 - x_3)^2 + (2y_1 - y_2 - y_3)^2. \quad (1)$$

Prin permutări circulare se obțin alte două egalități:

$$4m_b^2 = (2x_2 - x_1 - x_3)^2 + (2y_2 - y_1 - y_3)^2, \quad (2)$$

$$4m_c^2 = (2x_3 - x_1 - x_2)^2 + (2y_3 - y_1 - y_2)^2. \quad (3)$$

Egalitățile (1), (2), (3) se mai pot scrie:

$$4m_a^2 = [(x_1 - x_2) + (x_1 - x_3)]^2 + [(y_1 - y_2) + (y_1 - y_3)]^2,$$
$$4m_b^2 = [(x_1 - x_2) + (x_3 - x_2)]^2 + [(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)]^2,$$
$$4m_c^2 = [(x_1 - x_3) + (x_2 - x_3)]^2 + [(y_1 - y_3) + (y_2 - y_3)]^2$$

sau:

$$4m_a^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + 2(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_3)^2 + 2(y_1 - y_2)(y_1 - y_3), \quad (1')$$

$$4m_b^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + 2(y_1 - y_2)(y_3 - y_2), \quad (2')$$

$$4m_c^2 = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 2(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + 2(y_1 - y_3)(y_2 - y_3). \quad (3')$$

Pe de altă parte:

$$a^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2,$$
$$b^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2,$$
$$c^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Adunînd relațiile (1'), (2'), (3') obținem:

$$4m_a^2 + 4m_b^2 + 4m_c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

IX.R.2. Se consideră într-un sistem de axe rectangulare xOy punctele $A(-2, 3)$, $B(2, 6)$ și sub axa Ox, o paralelă la distanța de două unități. Să se determine pe această paralelă un punct C și altul D astfel ca:

a°). triunghiul ABC să fie dreptunghic în A.

b°). triunghiul ABD să fie dreptunghic în B.

Soluție. Panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{3}{4}$. Perpendiculara în A are ecuația $y - 3 = -\frac{4}{3}(x + 2)$ și rezolvînd sistemul: $y = -2$; $4x + 3y - 1 = 0$, obținem punctul $C\left(\frac{7}{4}, -2\right)$.

Pentru determinarea punctului D, rezolvăm sistemul format din ecuația $y = -2$ și ecuația perpendicularei în B pe AB: $4x + 3y - 26 = 0$ și obținem punctul $D(8, -2)$.

Alte moduri de rezolvare:

1°). Fie $C(\alpha, -2)$ și $D(\beta, -2)$ cele două puncte. Punem condiția ca fiecare triunghi să fie dreptunghic:

a°). $BC^2 = AB^2 + AC^2$ și deci:

$$(2-\alpha)^2 + (6+2)^2 = (2+2)^2 + (6-3)^2 + \\ + (\alpha+2)^2 + (3+2)^2;\ \alpha = \frac{7}{4}.$$

b°). $AD^2 = AB^2 + BD^2$ și deci:

$$(3+2)^2 + (\beta+2)^2 = (-2-2)^2 + (3-6)^2 + \\ + (2-\beta)^2 + (6+2)^2;\ \beta = 8.$$

2°). Cercul de diametru BC taie paralela în C și trebuie să treacă prin A:

Ecuația cercului este:

$$x^2 + y^2 - (\alpha+2)x - 4y + 2\alpha - 12 = 0.$$

Înlocuind $x = -2$ și $y = 3$ se obține $\alpha = \frac{7}{4}$.

Pentru β, se scrie ecuația cercului cu diametrul AD și se pune condiția ca punctul B să se găsească pe cerc.

IX.R.3. Se consideră într-un sistem rectangular xOy punctele $A(8, 0)$, $B(3, 6)$, $C(0, 3)$. Dreapta BC taie axa Ox în D și dreapta AB taie axa Oy în E. Să se arate că mijloacele laturilor OB, AC, și DE sînt coliniare.

Soluția I. Scriem ecuațiile dreptelor (AB), (BC) și stabilim coordonatele punctelor E, D:

(AB): $6x + 5y - 48 = 0$, și $E\left(0, \frac{48}{5}\right)$,

(BC): $x - y + 3 = 0$, $D(-3, 0)$.

M, mijlocul lui OB, are coordonatele $M\left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

N, mijlocul lui AC, are coordonatele $N\left(4, \frac{3}{2}\right)$.

P, mijlocul lui ED, are coordonatele $P\left(-\frac{3}{2}, \frac{24}{5}\right)$.

Se calculează în final valoarea determinantului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 3 & 1 \\ 4 & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{24}{5} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 8 & 3 & 2 \\ -15 & 48 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Soluția a II-a. Fie $D(\alpha, 0)$ și $E(0, \beta)$ punctele considerate.

Condiții:

B, C, D puncte coliniare: $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \alpha = -3;$

A, B, E puncte coliniare: $\begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \beta = \frac{48}{5}$, etc.

IX.R.4. Pe o latură a unui unghi drept se consideră punctele fixe A și B, iar pe cealaltă latură punctul M variabil. Se proiectează vîrful O al unghiului drept pe dreptele MA și MB respectiv în P și Q. Se cere:

a°). Să se arate că dreapta PQ trece printr-un punct fix.

b°). Să se calculeze raportul în care acest punct împarte segmentul AB. Peste tot, $A \neq O$, $B \neq O$, $A \neq B$.

Soluție. Este suficient să determinăm coordonatele punctului P în sistemul rectangular determinat de unghiul dat. Dreapta AM are ecuația $\lambda x + ay - a\lambda = 0$ unde $M(0, \lambda)$, iar $A(a, 0)$. Dreapta OP are ecuația:

$$ax - \lambda y = 0.$$

Rezolvînd sistemul format de ecuațiile acestor drepte se obțin coordonatele punctului P:

$$x_P = \frac{a\lambda^2}{a^2 + \lambda^2}, \quad y_P = \frac{a^2\lambda}{a^2 + \lambda^2}.$$

Punctul B are coordonatele $(b, 0)$, (se schimbă a cu b) deci:

$$x_Q = \frac{b\lambda^2}{b^2 + \lambda^2}, \quad y_Q = \frac{b^2\lambda}{b^2 + \lambda^2}.$$

După cîteva calcule, ecuația dreptei PQ se scrie:

$\lambda(a^2+\lambda^2)(a+b)x + (a^2+\lambda^2)(ab-\lambda^2)y - ab\lambda(a^2+\lambda^2) = 0$

sau:

$$\lambda(a + b)x + (ab - \lambda^2)y - \lambda ab = 0.$$

Se constată ușor că punctul fix este $F\left(\frac{ab}{a+b}, 0\right)$:

$$\frac{FA}{FB} = \frac{a - \dfrac{ab}{b+a}}{b - \dfrac{ab}{a+b}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Observație. Cercul cu diametrul OM are ecuația $x^2 + y^2 - \lambda y = 0$ și trece prin punctele P și Q.

Coordonatele punctului P sînt date de sistemul format din ecuațiile $\lambda x + ay - a\lambda = 0$ și $x^2 + y^2 - \lambda y = 0$.

Eliminînd pe x, se obține ecuația:

$$(a^2 + \lambda^2)y^2 - \lambda(2a^2 + \lambda^2)y + a^2\lambda^2 = 0$$

care trebuie să admită pe λ ca rădăcină: dreapta AM și cercul trec prin $M(0, \lambda)$.

Analog se obțin și coordonatele punctului Q.

Observație. Sugerăm și următoarea rezolvare:

Fie $P(\alpha, \beta)$ și $Q(\sigma, \gamma)$ punctele respective. Se scriu condițiile:

A, P, M — puncte coliniare,

B, Q, M — puncte coliniare,

O, P, Q, M se găsesc pe cercul de diametru OM.

IX.R.5. *Teorema lui Menelau.* Se consideră triunghiul $A_1 A_2 A_3$ și o dreaptă T care taie două laturi și prelungirea celei de-a treia (nu trece prin vîrfurile triunghiului).

Să se arate că laturile triunghiului sînt împărțite în rapoarte al căror produs este constant. Să se determine constanta.

Soluție. Fie $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ vîrfurile triunghiului și dreapta T de ecuație $T(x, y) \equiv Ax + By + C = 0$.

Dreapta T taie pe A_2A_3 în B_1, pe A_3A_1 în B_2 și pe A_1A_2 în B_3.

Fie $P = \dfrac{B_1A_2}{B_1A_3} \cdot \dfrac{B_2A_3}{B_2A_1} \cdot \dfrac{B_3A_1}{B_3A_2}$.

Se știe că o dreaptă împarte un segment într-un raport a cărui valoare se poate calcula. Astfel:

$$\frac{B_1A_2}{B_1A_3} = \frac{Ax_2 + By_2 + C}{Ax_3 + By_3 + C}$$

$$\frac{B_2A_3}{B_2A_1} = \frac{Ax_3 + By_3 + C}{Ax_1 + By_1 + C}$$

$$\frac{B_3A_1}{B_3A_2} = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}$$

și înmulțind aceste egalități se obține $P = 1$.

IX.R.6. *Teorema lui Ceva.* Trei drepte concurente care trec prin vîrfurile unui triunghi, împart laturile triunghiului în rapoarte al căror produs este constant. Să se determine valoarea constantei.

Soluție. Se consideră triunghiul $A_1\ A_2\ A_3$ și dreptele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 care se taie în I.

Notăm $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ vîrfurile triunghiului, și $I(x_0, y_0)$ punctul de intersecție și fie $P = \dfrac{B_1A_2}{B_1A_3} \cdot \dfrac{B_2A_3}{B_2A_1} \cdot \dfrac{B_3A_1}{B_3A_2}$.

Este suficient să calculăm raportul $\dfrac{B_1A_2}{B_1A_3}$. Pentru aceasta scriem mai întîi ecuația dreptei A_1I:

A_1I: $(y_1 - y_0)\,x - (x_1 - x_0)\,y + x_1y_0 - x_0y_1 = 0$.

Prin permutări circulare se obțin și ecuațiile celorlalte două ceviene:

A_2I: $(y_2 - y_0)\,x - (x_2 - x_0)\,y + x_2y_0 - x_0y_2 = 0$,

A_3I: $(y_3 - y_0)\,x - (x_3 - x_0)\,y + x_3y_0 - y_3x_0 = 0$.

Raportul:

$$\frac{B_1A_2}{B_1A_3} = \frac{(y_1 - y_0)\,x_2 - (x_1 - x_0)\,y_2 + x_1y_0 - x_0y_1}{(y_1 - y_0)\,x_3 - (x_1 - x_0)\,y_3 + x_1y_0 - x_0y_1} = \frac{I(1, 0, 2)}{I(1, 0, 3)} \text{ (convențional)}$$

conduce la:

$$\frac{B_2A_3}{B_2A_1} = \frac{I(2, 0, 3)}{I(2, 0, 1)}; \quad \frac{B_3A_1}{B_3A_2} = \frac{I(3, 0, 1)}{I(3, 0, 2)},$$

$$P = \frac{I(1, 0, 2)}{I(1, 0, 3)} \cdot \frac{I(2, 0, 3)}{I(2, 0, 1)} \cdot \frac{I(3, 0, 1)}{I(3, 0, 2)}.$$

Dar $I(2, 0, 1) = -I(1, 0, 2)$; $I(3, 0, 1) = -I(1, 0,3)$ și $I(3, 0, 2) = -I(2, 0, 3)$ și deci $P = -1$.

Iată verificarea primei afirmații:

$$\begin{aligned} I(2, 0, 1) &= (y_2 - y_0)\,x_1 - (x_2 - x_0)\,y_1 + x_2y_0 - x_0y_2 = \\ &= x_1y_2 - x_1y_0 - x_2y_1 + x_0y_1 + x_2y_0 - x_0y_2, \\ I(1, 0, 2) &= (y_1 - y_0)\,x_2 - (x_1 - x_0)\,y_2 + x_1y_0 - x_0y_1 = \\ &= x_2y_1 - x_2y_0 - x_1y_2 + x_0y_2 + x_1y_0 - x_0y_1 = \\ &= -[x_1y_2 - x_1y_0 - x_2y_1 + x_0y_1 + x_2y_0 - x_0y_2] = \\ &= -I(2, 0, 1). \end{aligned}$$

Observație. Ecuațiile cevienelor se pot scrie și sub formă de determinant:

$$IA_1 \equiv \equiv \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \; IA_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \; IA_3 \equiv \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În acest caz:

$$\frac{B_1A_2}{B_1A_3} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}; \quad \frac{B_2A_3}{B_2A_1} = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}; \quad \frac{B_3A_1}{B_3A_2} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}.$$

De data aceasta, se observă că determinanții în care figurează aceiași indici, diferă prin semn ((2, 0, 1) își schimbă semnul pentru a fi în ordinea (1, 0, 2)).

IX.R.7. Se consideră într-un sistem rectangular xOy cercul de ecuație $4(x^2 + y^2) + 8x - 12y + 9 = 0$ și punctul $A(-3, 2)$. Să se scrie ecuațiile tangentelor la cerc:

a°). paralele cu dreapta $15x + 8y - 12 = 0$;

b°). perpendiculare pe diametrul ce trece prin A.

Soluție. Se determină elementele cercului. Ecuația se scrie:

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y + \frac{9}{4} = 0 \quad \text{și} \quad \omega\left(-1, \frac{3}{2}\right), \ r = 1,$$

unde ω reprezintă centrul cercului iar r raza.

a°). Ecuațiile tangentelor paralele cu dreapta dată, al cărei coeficient director este $-\frac{15}{8}$, sînt:

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{15}{8}(x + 1) \pm 1\sqrt{1 + \frac{225}{64}}$$

și deci:

$$\begin{cases} 15x + 8y - 14 = 0 \\ 15x + 8y + 20 = 0 \end{cases}.$$

Ca verificare, se calculează distanța de la centrul cercului la fiecare din dreptele care reprezintă tangentele cerute.

b°). Diametrul care trece prin A are coeficientul director $m = \dfrac{2 - \frac{3}{2}}{-3 + 1} = -\frac{1}{4}$.

Ecuațiile tangentelor perpendiculare pe ωA sînt:

$$y - \frac{3}{2} = 4(x + 1) \pm \sqrt{17}$$

adică:

$$8x - 2y + 11 \pm 2\sqrt{17} = 0.$$

În adevăr, distanța de la centrul cercului la oricare din aceste drepte este:

$$d = \frac{\left| 8(-1) - 2\left(\frac{3}{2}\right) \pm 2\sqrt{17} \right|}{\sqrt{64+4}} = \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{68}} = 1$$

(raza cercului).

Problema se poate rezolva și astfel:

a°). Scriem $15x + 8y + \alpha = 0$ ca fiind una din ecuațiile tangentelor paralele cu dreapta dată și punem condiția ca distanța de la centrul cercului la această dreaptă să fie egală cu 1:

$$\frac{\left| 15(-1) + 8\left(\frac{3}{2}\right) + \alpha \right|}{17} = 1;\ |\alpha - 3| = 17$$

sau:

$\alpha_1 - 3 = 17$ și deci $\alpha_1 = 20$; $3 - \alpha_2 = 17$ și deci $\alpha_2 = -14$.

b°). Ecuația diametrului perpendicular pe diametrul care trece prin A este:

$$8x - 2y + 11 = 0. \qquad (1)$$

O dreaptă paralelă cu (1) are ecuația:

$$8x - 2y + \beta = 0.$$

Punem condiția ca distanța centrului cercului la această dreaptă să fie egală cu 1, adică:

$$\frac{\left| 8(-1) - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + \beta \right|}{\sqrt{64+4}} = 1;\ |\beta - 11| = 2\sqrt{17},$$

ceea ce conduce la:

$$\beta_1 = 11 + 2\sqrt{17};\ \beta_2 = 11 - 2\sqrt{17}.$$

IX.R.8. Într-un cerc se consideră diametrele AB, CD. O dreaptă variabilă ce trece prin C taie diametrul AB în M și cercul în N. Să se stabilească ecuația locului geometric al punctului I de intersecție între paralela la CD dusă prin M și tangenta la cerc în N. Aici $AB \perp CD$.

Soluție obținută fără a folosi elemente de geometrie analitică: se arată mai întîi că are loc egalitatea (vezi fig. IX. R. 8):

$$\frac{\cos u}{\sin u}\left[\frac{1}{\cos u}-\operatorname{tg}\left(45°-\frac{u}{2}\right)\right]=1,\ u\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

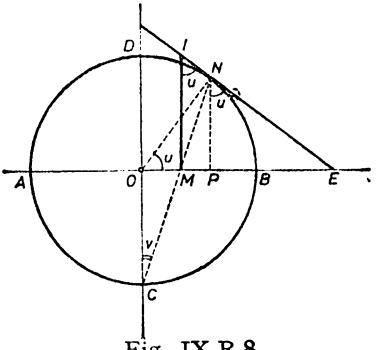


Fig. IX.R.8

Fie a raza cercului. Fie u unghiul PNE și $v = \widehat{OCM} = 45° - \frac{u}{2}$ întrucît $\sphericalangle DON = 2v = 90° - u$.

$\triangle IME \sim \triangle ONP$ deci $\frac{IM}{OP} = \frac{ME}{NP}$ și $\frac{IM}{a\cos u} = \frac{OE - OM}{a\sin u}$ iar $OM = a\operatorname{tg} v = a\operatorname{tg}\left(45° - \frac{u}{2}\right)$.

Deci $IM = a\cdot\frac{\cos u}{\sin u}\left[\frac{1}{\cos u} - \operatorname{tg}\left(45° - \frac{u}{2}\right)\right] = a$.

Așadar, IM este constant și deci locul geometric se reduce la tangenta în D la cerc.

Soluție analitică. Cele două diametre determină sistemul de referință rectangular xOy și fie punctul $C(0,-a)$.

Dreapta variabilă CMN are ecuația $y + a = \lambda x$. Prin intersecția dreptei CMN cu AE și cercul, obținem punctele:

$$M\left(\frac{a}{\lambda},\ 0\right),$$

$$N\left(2a\frac{\lambda}{\lambda^2+1},\ a\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\right).$$

Ecuația tangentei la cerc în N este:

$$x_N \cdot x + y_N \cdot y - a^2 = 0$$

și deci:

$$2a\frac{\lambda}{\lambda^2+1}x + a\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}y - a^2 = 0.$$

Ecuația locului geometric se obține eliminînd parametrul λ între:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\lambda} \\ \dfrac{2\lambda}{\lambda^2+1}x + \dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}y - a = 0. \end{cases}$$

Se obține $(x^2 - a^2)(y - a) = 0$ și deci $x = \pm a$, $y = a$. Cum $+a$ reprezintă analitic lungimea segmentului OC sau OD, rezultă că locul geometric este tangenta în D la cerc. De ce apar și ecuațiile $x = \pm a$?

Să considerăm cazurile cînd dreapta variabilă dusă prin C trece prin A sau B. În acest caz, punctele M și N coincid (cu A sau cu B). Intersecția I se găsește pe tangenta în A (pentru $x = -a$) sau în B (pentru $x = a$).

Este ușor de văzut că dacă diametrele sînt considerate ca în figura folosită, punctele I de intersecție nu pot fi situate decît deasupra diametrului AB.

IX.R.9. Într-o elipsă cu axele inegale, se duce prin mijlocul semiaxei mici OB', paralela la axa mare $A'A$. Această paralelă taie elipsa în punctele M respectiv N. Să se arate că tangenta în M la elipsă este paralelă cu BN și tangenta în N este paralelă cu BM (cele două situații au loc datorită simetriei).

Soluție. Sistemul de referință este determinat de axele elipsei. Fie $BO = OB' = b$ (BB' fiind axa mică a elipsei), $A'O = OA' = a$ (AA' fiind axa mare a elipsei).

Dreapta $y = -\dfrac{b}{2}$ taie elipsa în $M\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{b}{2}\right)$ și $N\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{b}{2}\right)$.

Ecuația tangentei în M este:

$$b\sqrt{3}x + ay + 2ab = 0,$$

iar ecuația dreptei ce suportă coarda BN este:

$$b\sqrt{3}x + ay - ab = 0$$

deci dreptele (BN) și tangenta în M sînt paralele.

Din motive de simetrie și tangenta în N este paralelă cu dreapta BM. Punctele M și N sînt simetrice în raport cu BB'. Cele două tangente se intersectează pe axa ordonatelor.

Se poate rata cazul general cînd se consideră o dreaptă $y = -\lambda$, $0 < \lambda < b$, care taie elipsa în X și Y, problema reformulîndu-se pentru acest caz.

IX.R.10. 1°). Să se arate că pentru ca patru puncte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) situate pe o parabolă $y^2 - 2px = 0$ să fie conciclice, ordonatele lor trebuie să satisfacă relația:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0.$$

2°). Fie A și B două puncte fixe distincte pe aceeași parabolă. Un cerc variabil care trece prin A și B mai taie parabola în M și N. Ținînd seama de relația de la 1°), să se determine locul geometric al intersecției tangentelor în M și N la parabolă.

Soluție. 1°). Considerăm un cerc oarecare de ecuație $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ și punem condiția ca sistemul format din ecuația cercului și ecuația parabolei să aibă soluții reale. Eliminînd pe x, obținem ecuația:

$$y^4 + 4p(p - a)\, y^2 - 8bp^2y + 4p^2c = 0.$$

Lipsind termenul de gradul al treilea, condiția este îndeplinită.

2°). Fie $A\left(\frac{a}{2p}, a\right)$, $B\left(\frac{b^2}{2p}, b\right)$, $M\left(\frac{\alpha^2}{2p}, \alpha\right)$, $N\left(\frac{\beta^2}{2p}, \beta\right)$ punctele considerate în enunț. Se știe (1°)) că $a + b + \alpha + \beta = 0$ (punctele fiind conciclice), deci:

$$\alpha + \beta = -(a + b).$$

Ecuațiile celor două tangente în M și N sînt:

$$2\alpha y = 2px + \alpha^2$$
$$2\beta y = 2px + \beta^2.$$

Punctul de intersecție se obține rezolvînd sistemul obținut din ecuațiile anterioare.

Prin scăderea acestor ecuații se obține:

$$2(\alpha - \beta)\, y = (\alpha - \beta)\,(\alpha + \beta)$$

și cum $\alpha \neq \beta$ rezultă $y = -\dfrac{a+b}{2}$.

Deci, locul geometric este o dreaptă paralelă cu axa de simetrie a parabolei.

IX.R.11. Fie într-un sistem rectangular xOy AB o coardă a unei parabole care nu este paralelă cu Ox și fie C mijlocul lui AB. Se proiectează punctul C pe axă în punctul C' și se duce prin C perpendiculara pe AB care întîlnește axa Ox în D.

a°). Să se demonstreze că oricare ar fi AB, segmentul $C'D$ este egal cu p (p fiind parametrul parabolei).

b°). Să se deducă din afirmația anterioară o modalitate pentru determinarea vîrfului unei parabole cînd se cunosc două puncte (nesimetrice) situate pe parabolă și axa parabolei.

Soluție. a°). Fie punctele:

$$A\left(\frac{y_1^2}{2p},\ y_1\right),\quad B\left(\frac{y_2^2}{2p},\ y_2\right),\quad C\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{4p},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Coeficientul director al dreptei AB este $m = \dfrac{2p}{y_1+y_2}$.

Ecuația dreptei $CD \perp AB$ este:

$$y - \frac{y_1+y_2}{2} = -\frac{y_1+y_2}{2p}\left(x - \frac{y_1^2+y_2^2}{4p}\right).$$

D fiind punctul de intersecție cu axa Ox, $x_D = p + \dfrac{y_1^2+y_2^2}{4p}$; C' fiind proiecția pe axă a punctului C, $x_{C'} = \dfrac{y_1^2+y_2^2}{4p}$ și $x_D - x_{C'} = p$.

b°). Se proiectează A în A' pe axa Ox și considerăm $A'M = C'D = p$. Aceasta înseamnă că AM este normală. Perpendiculara în A pe AM taie axa Ox în T. Fie S mijlocul segmentului TA'. S este vîrful parabolei.

Observație. Folosind considerații geometrice și noțiunea de derivată se pot stabili anumite proprietăți ale parabolei.

Fie $y^2 = 2px$ ecuația parabolei raportată la un sistem rectangular xOy, axa Ox fiind și axă de simetrie a parabolei deci raportată la axa sa de simetrie și la tangenta în vîrf. Fie $A(x, y)$ un punct oarecare, al parabolei: AT este tangenta în A, iar AN este normala. Tangenta formează unghiul u cu axa.

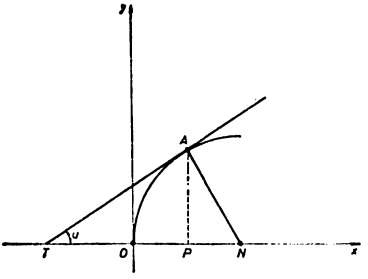


Fig. IX.R.11

Derivînd ecuația parabolei, se obține:

$$y'y = p \text{ și deci } y' = \frac{p}{y} = \operatorname{tg} u.$$

1°). Din triunghiul APN (vezi fig. IX.R.11):

$$PN = AP \cdot \operatorname{tg} u \text{ deci } PN = y \cdot \frac{p}{y} = p,$$

ceea ce înseamnă că distanța de la proiecția unui punct A pe axă la piciorul normalei considerată în același punct este constantă, fiind egală cu p (parametrul parabolei). De aici un procedeu pentru construirea normalei și a tangentei cînd se cunosc punctul și parametrul parabolei (sau poziția focarului).

2°). Din triunghiul APT:

$$PT = AP \cdot \operatorname{ctg} u = y \cdot \frac{y}{p} = \frac{2px}{p} = 2x.$$

Aceasta înseamnă că tangenta în vîrf este mediatoarea segmentului determinat de T (intersecția tangentei considerată în A cu axa de simetrie) și proiecția punctului pe axă. Deci, pentru a construi tangenta la parabolă în A, se proiectează punctul A pe axă (în P) și se consideră $OP = OT$. Se unește T cu A.

3°). Ținînd seama că:

$$\sin u = \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

obținem:

$$AT = \frac{AP}{\sin u} = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2};$$

$$AN = \frac{y}{\cos u} = y \cdot \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{p^2+y^2},$$

$$AT = \frac{y}{p}\sqrt{p^2+y^2}.$$

Se verifică ușor că $AT^2 + AN^2 = (p+2x)^2$.

Peste tot, (x, y) reprezintă coordonatele punctului considerat A.

Segmentele considerate sînt:

AT — tangenta; AN — normala; TP — subtangenta și PN — subnormala.

Locul punctelor din plan pentru care subnormala este constantă reprezintă o parabolă.

În adevăr, dacă $y^2 = 2px$ este mulțimea parabolelor cu axa de simetrie Ox și de parametru p, prin derivare se obține:

$$yy' = p.$$

IX.R.12. Fie parabola $y^2 = 2px$ și punctele T_1, T_2, T_3 situate pe parabolă și t_1, t_2, t_3 tangentele construite în aceste puncte.

Să se calculeze raportul dintre aria triunghiului $T_1T_2T_3$ și aria triunghiului determinat de cele trei tangente.

Soluție. Fie într-un sistem rectangular $xOy, T_i\ (2p\alpha_i^2, 2p\alpha_i)$, $i = \overline{1,3}$, cele trei puncte și dreptele t_i de ecuații:

$$2\alpha_i y = x + 2p\alpha_i^2,\ i = \overline{1,3},$$

Însemnînd, de asemenea, prin I_{ij} punctul de intersecție între tangentele t_i, t_j și obținem punctele:

$$P_{ij}\,[2p\alpha_i\alpha_j,\ p(\alpha_i + \alpha_j)],\ i, j, \in \overline{1,3}\ i \neq j.$$

Dacă $S(T)$ este aria triunghiului $T_1T_2T_3$ și $S(t)$, aria triunghiului $P_1P_2P_3$, obținem:

$$S(T) = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2p\alpha_1^2 & 2p\alpha_1 & 1 \\ 2p\alpha_2^2 & 2p\alpha_2 & 1 \\ 2p\alpha_3^2 & 2p\alpha_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2p^2\,|(\alpha_1 - \alpha_2)\,(\alpha_2 - \alpha_3)\,(\alpha_3 - \alpha_1)|,$$

$$S(t) = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2p\alpha_1\alpha_2 & p(\alpha_1 + \alpha_2) & 1 \\ 2p\alpha_2\alpha_3 & p(\alpha_2 + \alpha_3) & 1 \\ 2p\alpha_3\alpha_1 & p(\alpha_3 + \alpha_1) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= p^2\,|(\alpha_1 - \alpha_2)\,(\alpha_2 - \alpha_3)\,(\alpha_3 - \alpha_1)|.$$

Deci $\dfrac{S(T)}{S(t)} = 2.$

Observație. Dintre toate conicele (Γ) nedegenerate, parabola este singura conică pentru care se poate vorbi de această proprietate. Raportul ariilor nu depinde nici de parmetrul p al parabolei, nici de coordonatele celor trei puncte situate pe parabolă.

Problema are sens oricare ar fi tripletul (T_1, T_2, T_3) pentru că punctele nu pot fi coliniare.

Recomandare. În asemenea cazuri este bine să se considere un caz particular și anume două puncte A, B simetrice față de axa de simetrie a parabolei și O

iar vîrful parabolei, cel de-al treilea punct. Tangentele în A şi B se intersectează în I pe axa parabolei şi fie C, D intersecţiile tangentelor în A şi respectiv B cu tangenta în O. Rezultă $CD = \frac{1}{2} AB$, $IO = OE$, unde E este mijlocul lui AB. De aici $S(T) = S(OAB) = \frac{1}{2} OE \cdot AB$;

$$S(t) = S(ICD) = \frac{1}{2} \cdot IO \cdot CD = \frac{1}{2} OE \cdot \frac{1}{2} AB;$$

$$\frac{S(T)}{S(t)} = \frac{\frac{1}{2} OE \cdot AB}{\frac{1}{2} OE \cdot \frac{1}{2} \cdot AB} = 2.$$

IX.R.13. Fie într-un sistem rectangular xOy, $M(x_0, y_0)$ un punct variabil pe hiperbola de ecuaţie:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \quad ab \neq 0.$$

Tangenta în M la hiperbolă intersectează asimptotele hiperbolei în C, D. Să se calculeze aria triunghiului OCD.

Soluţie. Dacă bănuim că aria ar fi constantă, atunci considerăm punctul $M(a, 0)$ chiar în vîrful hiperbolei. Dreapta $x = a$ este tangenta şi punctele C şi D au coordonatele (a, b), $(a, -b)$ iar $S(OCD) = ab$, $b > 0$.

Rezolvarea problemei cere ca punctul să fie situat pe hiperbolă:

$$b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0,$$

Ecuaţia tangentei în M este:

$$b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2 = 0.$$

Intersecţiile tangentei cu asimptotele de ecuaţii:

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

conduc la punctele:

$$C\left(\frac{a^2b}{bx_0 - ay_0}, \frac{ab^2}{bx_0 - ay_0}\right), \quad D\left(\frac{a^2b}{bx_0 + ay_0}, -\frac{ab^2}{bx_0 + ay_0}\right).$$

$$S(OCD) = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{a^2b}{bx_0 + ay_0} & -\dfrac{ab^2}{bx_0 + ay_0} & 1 \\ \dfrac{a^2b}{bx_0 - ay_0} & \dfrac{ab^2}{bx_0 - ay_0} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\, a^3b^3\, \frac{2}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} = ab.$$

Observație. Dacă sistemul de referință se schimbă prin rotație și translație, ecuația hiperbolei se reduce la:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}.$$

Asimptotele acestei curbe au ecuațiile:

$$y = \frac{a}{d}\, x + \frac{bd - ae}{d^2} \quad \text{și} \quad x = -\frac{e}{d},$$

iar coordonatele punctului M sînt:

$$\left(x_0,\, y_0 = \frac{ax_0^2 + bx_0 + c}{dx_0 + c}\right).$$

Ecuația tangentei este:

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

IX.R.14. Tangentele duse din punctul $P(x_0,\ y_0)$ la parabola $y^2 = 2px$ au punctele de contact A și B cu parabola. Fie M mijlocul coardei AB. Să se arate că paralela punctului M la axa de simetrie trece prin P.

Soluție. Punctele de tangență A și B se găsesc la intersecția polarei punctului P cu parabola. Coordonatele lor sînt soluțiile sistemului:

$$y_0y = p(x + x_0)$$
$$y^2 = 2px.$$

Este suficient să eliminăm necunoscuta x pentru a obține y.

Dacă semisuma rădăcinilor ecuației obținute este egală cu ordonata punctului P, problema este rezolvată.

Eliminînd pe x se obține ecuația:

$$y^2 - 2y_0y + 2px_0 = 0$$

și deci:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = y_0.$$

TESTE

IX.T.1. Se consideră ecuația $ax + by = a^2 + b^2$. Se cere să se precizeze dacă dreapta trece prin punctele: 1°). $A(a,0)$; 2°). $B(b,0)$; 3°). $C(0,b)$; 4°). $D(a,b)$, $ab \neq 0$.

IX.T.2. Trei drepte sînt tangente la același cerc și punctele de tangență sînt vîrfurile unui triunghi dreptunghic. Să se cerceteze dacă două dintre tangente pot fi: 1°). perpendiculare; 2°). paralele.

IX.T.3. Se consideră punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ și $D(x_4, y_4)$.

Se mai știe că $x_1 - x_2 = x_4 - x_3$ și $y_1 - y_2 = y_4 - y_3$. Să se precizeze dacă patrulaterul $ABCD$ este: 1°). pătrat; 2°). paralelogram; 3°). trapez isoscel.

IX.T.4. Se consideră punctele (1, 2), (3, 4), (5, 2). Să se cerceteze dacă triunghiul cu vîrfurile în aceste puncte este: 1°). oarecare dar nici isoscel nici dreptungic; 2°). triunghi isoscel; 3°). dreptunghic; 4°). echilateral.

IX.T.5. Se consideră punctele $A(1, -2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 6)$, $D(3, 0)$. Să se cerceteze dacă ariile S_1 a triunghiului ABC și S_2 a triunghiului BCD, satisfac relația: 1°). $S_1 > S_2$; 2°). $S_1 < S_2$; 3°). $S_1 = S_2$.

IX.T.6. Se consideră punctele $A(a, b)$, $B(a + m, b + m)$, $C(a + 2m, b + 4m)$, $D(a + m, b + 3m)$, $m \neq 0$. Să se cerceteze dacă segmentele AB, CD sînt: 1°). egale; 2°). paralele; 3°). perpendiculare.

IX.T.7. Condiserăm aceleași puncte ca în exercițiul precedent. Să se precizeze dacă $S_1 = S(ABC)$ și $S_2 = S(BCD)$ satisfac relația:

1°). $S_1 > S_2$; 2°). $S_1 < S_2$; 3°). $S_1 = S_2$.

IX.T.8. Se consideră punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ ca vîrfurile unui patrulater nedegenerat, conturul $ABCD$ fiind parcurs în sens trigometric (AC și BD sînt diagonale). Se cere să se precizeze dacă expresia E, dată prin relația:

$$2E = (x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)$$

este:

1°). $E > 0$; 2°). $E < 0$; 3°). $E = 0$.

IX.T.9. Se consideră punctele $A(-a, 0)$, $B(0, -a)$, $C(a, 0)$ și $D(0, a)$, $a \neq 0$. Să se precizeze dacă patrulaterul $ABCD$:

1°). este inscriptibil; 2°). are diagonalele reciproc perpendiculare; 3°). are diagonalele egale; 4°). are aria egală cu $2a^2$.

IX.T.10. Se consideră punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ și ecuația curbei:

$$\Gamma \equiv x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Se cere să se precizeze dacă:

1°). $A \in \Gamma$; 2°). $B \in \Gamma$ sau $A \notin \Gamma$; 3°). $A \in \Gamma$ și $B \in \Gamma$; 4°). $A \notin \Gamma$.

IX.T.11. Înseamnăm prin c lungimea celei mai mari coarde din curba Γ (a cărei ecuație este dată în IX.T.10). Să se precizeze dacă:

1°). $c \leqslant AB$; 2°). $c = AB$; 3°). $c \geqslant AB$.

IX.T.12. Se consideră cercul $\Gamma \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ și dreapta $D \equiv 12x - 5y + 19 = 0$. Să se precizeze dacă dreapta D față de cercul Γ este:

1°). exterioară; 2°). secantă; 3°). tangentă.

IX.T.13. Să se precizeze dacă cercul de ecuație $x^2 + y^2 - 2x = 0$ trece prin:

1°). originea sistemului; 2°). punctul (2, 0); 3°). punctul (1, — 1).

IX.T.14. Se consideră cercurile:

$$\Gamma_1 \equiv x^2 + y^2 - \frac{a}{2}\, x + \frac{b}{2}\, y + c = 0$$

și

$$\Gamma_2 \equiv 2x^2 + 2y^2 - ax + by - 2c = 0.$$

Să se precizeze dacă cercurile Γ_1 și Γ_2 sînt:
1°). concentrice; 2°). secante; 3°). tangente exterior; 4°). tangente interior.

IX.T.15. Se consideră ecuațiile $E_1 = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ și $E_2 = b^2(x - u)^2 + a^2(y - v)^2 - a^2b^2 = 0$, $uv \neq 0$ și se cere să se cerceteze dacă raportate la același sistem de referință rectangular, reprezintă:
1°). aceeași curbă; 2°). curbe de același gen; 3°). ariile suprafețelor delimitate de aceste curbe sînt egale.

IX.T.16. Centrele a două cercuri sînt $C_1(a_1, b_1)$, $C_2(a_2, b_2)$, iar razele r_1 și r_2 satisfac relația:
$2(a_1a_2 + b_1b_2) = r_1^2 + r_2^2 - (a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2)$.
Se cere să se precizeze dacă cercurile sînt:
1°). secante; 2°). tangente; 3°). ortogonale.

IX.T.17. Două diametre au direcțiile m și m' și are loc relația $a^2mm' = b^2$. Să se precizeze dacă direcțiile sînt corespunzătoare diametrelor conjugate la:
1°). elipsă; 2°). hiperbolă; 3°). parabolă.

IX.T.18. Hiperbola cu semiaxele a și b, focarele F_1 și F_2 are centrul O. Un punct M este considerat în planul hiperbolei M satisface relația:

$$OM^2 - MF_1 \cdot MF_2 = a^2 - b^2.$$

Se cere să se precizeze dacă punctul M este:
1°). exterior hiperbolei; 2°); interior hiperbolei; 3°). pe hiperbolă.

IX.T.19. Fie curba de ecuație $x^2 - y^2 = a^2$. Se consideră un punct M pe curbă cu ordonata $p = MN$, $MN \perp Ox$, $N \in Ox$ și tangenta dusă din N la cercul descris pe axa transversă ca diametru. Lungimea tangentei este t. Se cere să se precizeze dacă:
1°). $t > p$; 2°). $t = p$; 3°). $t < p$.

IX.T.20. Se consideră o elipsă raportată la axele sale de simetrie. Se cere să se precizeze în ce condiții există puncte pe elipsă astfel încît razele vectoare corespunzătoare sînt reciproc perpendiculare.
1°). $b > c$; 2°). $b = c$; 3°). $b < c$, notațiile fiind cele uzuale.

RĂSPUNSURI

IX.T.1. 1°), 2°), 3°) nu; 4°). da. **IX.T.2.** 1°). da, 2°). da. **IX.T.3.** 1°). poate fi dacă se mai adaugă condiții; 2°). da; 3°). nu. **IX.T.4.** 1°). nu; 2°). da; 3°). da; 4°). nu. **IX.T.5.** 1°). nu; 2°). nu; 3°). da (patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram). **IX.T.6.** 1°). da; 2°). da; 3°). nu. **IX.T.7.** 1°). nu; 2°). nu; 3°). da. **IX.T.8.** 1°). da; 2°). nu; 3°). da, dacă $x_1y_2 + x_3y_4 + x_2x_3 + x_4y_1 = x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3$. **IX.T.9.** 1°). da; 2°). da; 3°). da; 4°). da (este un pătrat). **IX.T.10.** 1°). da; 2°). da; 3°). da; 4°). nu. **IX.T.11.** 1°). da; 2°). da; 3°). da. **IX.T.12.** 1°). nu; 2°). nu; 3°). da. **IX.T.13.** 1°). da; 2°). da; 3°). da. **IX.T.14.** 1°). da; 2°). nu; 3°). nu. Ecuațiile diferă numai prin termenul liber, fapt cu totul evident). **IX.T.15.** 1°). nu; 2°). da; 3°). da (cele două curbe sînt elipse în care axa mare este $2a$; axa mică este $2b$). **IX.T.16.** 1°). da; 2°). nu; 3°). da. **IX.T.17.** 1°). nu; 2°). da; 3°). nu. **IX.T.18.** 1°). nu; 2°). nu; 3°). da. **IX.T.19.** 1°). nu; 2°). da; 3°). nu (se folosește puterea punctului N față de cerc). **IX.T.20.** 1°). nu; 2°). da (există punctele B și B'); 3°. da (o infinitate de puncte). Condiția: $x_0^2 + y_0^2 = c^2$ dacă $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$.

PROBLEME PROPUSE

IX.P.1. Să se stabilească particularitatea triunghiului format de punctele din sistemul rectangular xOy:

$$A(2+\sqrt{3}, 1),\ B(\sqrt{3}, -1),\ C(-1, -\sqrt{3}).$$

IX.P.2. Se consideră în sistemul rectangular xOy punctele $A(1, 1)$, $B(2, -3)$, $C(6, 0)$. Să se determine coordonatele punctului D, al patrulea vîrf al paralelogramului $ABCD$ cu o diagonală AC.

IX.P.3. Se consideră un triunghi ascuțitunghic OAB; pe dreptele OA și OB se iau punctele C și D astfel încît $AC = BD = \lambda$.

Mediatoarea segmentului CD trece printr-un punct fix cînd λ variază?

IX.P.4[1]. Se consideră două drepte perpendiculare Ox, Oy și o dreaptă care le intersectează în A respectiv B $(A \neq O,\ B \neq O)$. Notăm cu C proiecția lui O pe AB, cu M și N proiecțiile lui C pe Ox respectiv Oy, cu D punctul în care dreapta CM intersectează paralela dusă prin B la Ox și cu E punctul în care dreapta CN intersectează paralela dusă prin A la Oy.

1°). Să se arate $m_{DE} = m^3{}_{AB}$ (m_{DE} fiind coeficientul director al dreptei DE iar m_{AB} al dreptei AB);

2°). Să se arate că dreptele AB, DE și MN sînt concurente.

IX.P.5. Se consideră dreptele perpendiculare Ox și Oy și un punct $M(a, b)$. Prin acest punct se duc dreptele variabile $MA (A \in Ox)$, $MB (B \in Oy)$ astfel încît $MA \perp MB$.

Să se stabilească locul geometric al proiecției P a lui M pe dreapta AB.

IX.P.6[1]. Se consideră în sistemul rectangular xOy cercul de ecuație:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

și punctul $A(2, 0)$.

Să se determine punctele P ale cercului considerat care satisfac condiția $AP = k \cdot OP$, unde k este un număr pozitiv arbitrar. *Discuție.*

IX.P.7. Să se determine mulțimile punctelor din care se pot duce:

a°). tangente reciproc perpendiculare la cercul cu diametrul BB';

b°). tangente reciproc perpendiculare la elipsa cu axele $A'A$ și BB'.

IX.P.8*. Se consideră un triunghi ABC și o dreaptă Δ variabilă care se deplasează paralel cu ea însăși. Fie A', B', C' proiecțiile vîrfurilor triunghiului pe dreapta Δ.

Să se arate că perpendicularele din A', B', C' pe BC, CA, AB sînt concurente.

Să se determine locul geometric al punctului de concurență.

IX.P.9. Fie A și B două puncte fixe. Prin B se duce o dreaptă oarecare și prin A, perpendiculara AP pe aceasta. P este piciorul perpendicularei.

Se consideră pe AP punctul M, astfel încît:

$$AM \cdot AP = k \text{ (constant)}.$$

Se cere locul geometric al punctului M.

IX.P.10[1]. Pe axele perpendiculare Ox și Oy se iau respectiv punctele mobile M și N astfel că:

$$OM + ON = a \text{ (constant)}.$$

Fie P al patrulea vîrf al dreptunghiului cu laturile OM, ON.

Să se arate că perpendiculara din P pe MN trece printr-un punct fix.

IX.P.11. Prin punctul $P(a, b)$ se duc două drepte variabile, perpendiculare între ele; una dintre acestea taie axa absciselor în A, iar cealată axa ordonatelor în B.

Se cere locul geometric al punctului I, mijlocul segmentului AB.

IX.P.12. Prin punctul fix P din plan trec două drepte perpendiculare una pe alta. Una taie axa absciselor în M, cealaltă taie axa ordonatelor în N.

Să se afle locul geometric al proiecției (ortogonale) a punctului P pe MN.

IX.P.13[1]. Un echer cu vîrful unghiului drept A se mișcă în planul axelor de coordonate, astfel încît vîrfurile B și C ale unghiurilor ascuțite alunecă respectiv pe axele $y'y$ și $x'x$. Se cere locul geometric al vîrfului A.

IX.P.14[2]. Triunghiul variabil dreptunghic isoscel are vîrful B fix pe una din axele sistemului de referință iar vîrful unghiului drept A alunecă pe cealaltă axă. Se cere locul geometric descris de vîrful $C(AB = AC, \sphericalangle A = 90°)$.

IX.P.15. Punctele fixe A și B sînt situate pe axa absciselor. Punctul C variabil este situat pe axa ordonatelor. Se consideră perpendiculara în A pe AC și perpendiculara în B pe BC.

Se cere locul geometric al intersecției acestor perpendiculare.

IX.P.16[2]. Prin vîrfurile A, B, C ale unui triunghi se duc în planul triunghiului trei drepte, avînd ca ecuații:

$$D_2 - \alpha D_3 = 0;\ D_3 - \beta D_1 = 0;\ D_1 - \gamma D_2 = 0,$$

unde $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ reprezintă ecuațiile laturilor triunghiului în ordinea BC, CA, AB.

Atunci cele trei drepte sînt concurente dacă și numai dacă:

$$\alpha\beta\gamma = 1.$$

IX.P.17. Pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N, P care împart aceste laturi în rapoartele:

$$\frac{MB}{MC} = \alpha;\ \frac{NC}{NA} = \beta;\ \frac{PA}{PB} = \gamma.$$

Să se arate că aria triunghiului MNP este dată de formula:

$$S' = S \cdot \frac{1 - \alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

unde S reprezintă aria triunghiului ABC.

IX.P.18[2]. Pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi oarecare se consideră punctele M, N, P și se notează cu α, β, γ rapoartele:

$$\frac{MB}{MC}, \quad \frac{NC}{NA}, \quad \frac{PA}{PB}.$$

Să se arate că relația $\alpha\beta\gamma = 1$ exprimă condiția necesară și suficientă ca punctele M, N, P să fie coliniare (teorema lui *Menelau*).

IX.P.19[2]. Pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC se consideră respectiv punctele M, N, P care împart aceste laturi în rapoartele α, β, γ.

Să se arate că relația $\alpha\beta\gamma + 1 = 0$ exprimă condiția necesară și suficientă ca dreptele AM, BN, CP să fie concurente (teorema lui *Ceva*).

IX.P.20[1]. Fie d_1, d_2, ..., d_n distanțele a n puncte fixe P_1, P_2, ..., P_n la o dreaptă mobilă (D). Să se arate că, dacă:

$$k_1 d_1 + k_2 d_2 + \ldots + k_n d_n = 0$$

unde k_i sînt constante, dreapta (D) trece printr-un punct fix.

IX.P.21. Dacă A_1, A_2, A_3 sînt vîrfurile unui triunghi, G centrul de greutate al triunghiului, iar M un punct oarecare din planul triunghiului atunci are loc egalitatea vectorială:

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} = 3\overrightarrow{MG}.$$

IX.P.22. Se consideră o piramidă cu vîrful S și baza un paralelogram $ABCD$ ale cărui diagonale se intersectează în O. Să se demonstreze egalitatea:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

IX.P.23. Să se determine unghiul format de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ știind ca vectorul $\vec{a} + 3\vec{b}$ este perpendicular pe vectorul $7\vec{a} - 5\vec{b}$ și vectorul $\vec{a} - 4\vec{b}$ este perpendicular pe vectorul $7\vec{a} - 2\vec{b}$.

IX.P.24[1]**.** Printr-un punct fix P, considerat pe diametrul AB al unui cerc, se duce secanta PCD (C și D sînt extremitățile coardei determinate în cerc). Tangentele în C și D se taie în punctul M.

Să se calculeze:

$$E = \operatorname{tg} \sphericalangle APC \cdot \operatorname{tg} \sphericalangle APM.$$

IX.P.25[1]**.** Într-un cerc cu centrul O și raza R se consideră diametrul fix AB și raza mobilă OC; fie D centrul cercului dus prin A, O, C iar E centrul cercului dus prin B, O, C. Dreptele AD, BE se taie în M. Se cere să se arate că:

1°). Punctul M se află pe cercul dat.

2°). Dreapta CM este paralelă cu AB.

3°). Punctele O, C, D, E, M sînt situate pe un același cerc.

IX.P.26. Se consideră două cercuri secante în A și B; tangentele în A la cele două cercuri intersectează a doua oară cercurile în C și D.

Să se arate că are loc egalitatea:

$$AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC.$$

IX.P.27[1]**.** Să se arate că ortocentrul unui triunghi este centrul radical al cercurilor construite pe laturi ca diametre.

IX.P.28. Un segment mobil și variabil AB este cuprins între două drepte paralele și este văzut sub un unghi drept dintr-un punct fix O.

Să se determine locul geometric al proiecției punctului O pe AB.

IX.P.29[1]. Fie M un punct variabil pe parabola $y^2 = 2px$. Tangenta în M taie axa Ox în punctul T. Perpendiculara în T pe Ox taie dreapta OM în punctul I.

Să se arate că punctul I descrie o parabolă.

IX.P.30. Să se arate că segmentul din tangenta la hiperbola $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ cuprins între asimptotele sale este văzut din focar sub un unghi V constant.

IX.P.31[2]. Prin focarul parabolei $y^2 - 2px = 0$ se duce coarda AB care face cu Ox unghiul α.

1°). Să se calculeze $E = AB \sin^2 \alpha$.

2°). Dacă prin focar se mai duce $CD \perp AB$, să se arate că:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{2p}.$$

IX.P.32[1]. Se consideră parabola $y^2 = 8px$ și punctul M situat pe directoarea parabolei. Din M se duc tangentele MA, MB la parabolă (A, B, fiind punctele de contact). Se notează $MA = a$, $MB = b$.

Să se arate că:

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{(2p)^{\frac{2}{3}}}.$$

IX.P.33[1]. Se consideră o coardă focală a unei parabole. Să se demonstreze că produsele coordonatelor de același nume ale extremităților coardei sînt constante.

IX.P.34. Pătratele perpendicularelor focarului unei parabole pe două tangente oarecare sînt proporționale cu razele vectoare ale punctelor de contact.

IX.P.35[2]. Pe o parabolă se consideră trei puncte A, B, C; tangentele în aceste puncte determină un triunghi $A'B'C'$. Să se arate că aria $A'B'C' = \frac{1}{2}$ aria ABC.

INDICAȚII

IX.P.1. Se calculează pătratele lungimilor laturilor și se compară.

IX.P.2. Se ține seama de faptul că diagonalele se taie în părți egale.

IX.P.3. Se poate folosi sistemul de axe determinat de bisectoarea unghiului AOB.

IX.P.4[1]. Se urmărește atent enunțul și se ajunge la: 1°). coeficienții directori; 2°). un sistem pentru care determinantul coeficienților este nul.

IX.P.5. Se scriu ecuațiile dreptelor MA și MB care să depindă de același parametru apoi se elimină parametrul folosit între ecuația dreptei AB și ecuația perpendicularei punctului M pe AB.

IX.P.6[1]. Se determină mulțimea punctelor din plan care satisfac condiția $(x-2)^2+y^2=k^2(x^2+y^2)$.

IX.P.7. Pătratul circumscris unui cerc are vîrfurile situate pe cercul din ale cărui puncte tangentele duse la cercul înscris sînt reciproc perpendiculare.

IX.P.8*. Se traduce, pe etape, enunțul problemei.

IX.P.9. Se alege sistemul de referință convenabil.

IX.P.10[1]. Se folosesc doi parametri și o relație între ei. Se elimină apoi un parametru și se obține ecuația unui fascicul de drepte.

IX.P.11. Se exprimă ecuațiile parametrice, apoi se elimină parametrul între ele pentru a obține ecuația carteziană a locului.

IX.P.12. Se urmează aceeași cale ca în exercițiul precedent.

IX.P.13[1]. Se consideră punctele $B(0, u)$ și $C(v, 0)$ unde $u^2+v^2=a^2$ și $b^2+c^2=a^2$.

IX.P.14[2]. Se vor considera toate cazurile posibile: B este situat pe Ox sau $x'O$; punctul C este situat în cadranele I sau III respectiv cadranele II sau IV.

IX.P.15. Se elimină parametrul folosit între ecuațiile celor două perpendiculare care se intersectează.

IX.P.16[2]. Se face apel la produsul a doi determinanți (linie, coloană, linie).

IX.P.17. Aceeași observație ca în problema precedentă.

IX.P.18[2]. Vezi problema precedentă.

IX.P.19[2]. Produsul a doi determinanți este egal cu determinantul obținut, punînd condiția de concurență.

IX.P.20[1]. Se folosește ecuația normală a dreptei D care depinde de parametrii α și p. Eliminînd parametrul p se obține ecuația unui fascicul.

IX.P.21. Se fac operații cu vectori (suma a doi vectori).

IX.P.22. Analog cu cazul precedent.

IX.P.23. Produsul scalar a doi vectori perpendiculari este nul.

IX.P.24[1]. Produsul tangentelor unghiurilor menționate este constant.

IX.P.25[1]. Unghiul pe care-l face raza variabilă OC cu diametrul AB este u.

IX.P.26. Se scriu ecuațiile celor două cercuri care au axa radicală drept axa ordonatelor.

IX.P.27[1]. Se alege sistemul de referință astfel încît să aibă loc situația $A(0, a)$, $B(b, 0)$ și $C(c, 0)$.

IX.P.28. Se alege perpendiculara punctului fix O pe cele două drepte paralele ca axă a absciselor, iar perpendiculara în O, axă a ordonatelor.

IX.P.29[1]**.** Se scrie ecuația tangentei, apoi se intersectează cu axa Ox.

IX.P.30. Se alcătuiesc sistemele necesare determinării ecuațiilor dreptelor FM_1 și FM_2 unde M_1, M_2 sînt punctele de intersecție între tangenta variabilă și asimptotele hiperbolei.

IX.P.31[2]**.** Se exprimă lungimea fiecărei coarde și se ține seama că a doua coardă formează unghiul $\frac{\pi}{2} + \alpha$ cu axa Ox.

IX.P.32[1]**.** Tangentele duse de pe directoare la parabolă sînt reciproc perpendiculare. Se tratează cazul parabolei $y^2 = 2px$ și apoi se înlocuiește p prin $4p$.

IX.P.33[1]**.** Se ține seama că $y^2 = 2px$ și $y = m\left(x - \frac{p}{2}\right)$ alcătuiesc sistemul care furnizează coordonatele extremităților coardei.

IX.P.34. Se constată că raportul între pătratul distanței focarului la o tangentă și lungimea razei vectoare la punctul de contact este constant $\left(= \frac{p}{2}\right)$.

IX.P.35[2]**.** Se exprimă coordonatele punctelor ABC și se folosește formula de calcul pentru aria unui triunghi în funcție de coordonatele vîrfurilor triunghiului.

Se ține seama și de faptul că:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a - b)(a - c)(b - c).$$

IX.P.1. Calculînd lungimile laturilor obținem:

$$AB^2 = 8;\ BC^2 = 8 \text{ și } AC^2 = 16 + 8\sqrt{3}.$$

Triunghiul este isoscel cu baza AC.

IX.P.2. Fie I mijlocul diagonalei și (x, y) coordonatele punctului D. Se obțin ecuațiile $x + 2 = 7$ și $y - 3 = 1$ și deci punctul D (5, 4).

Problema se mai poate rezolva și altfel; avem: $AB = CD$, $AB \parallel CD$ (sau $AD = BC$, $AD \parallel BC$); $AB^2 = CD^2$ deci $(x-6)^2 + y^2 = 17$; $AB \parallel CD$ implică:

$$\frac{y}{x-6} = -4 \text{ etc.}$$

IX.P.3. Alegem ca sistem de referință bisectoarea unghiului AOB ca axă Ox și perpendiculara în O pe bisectoare ca axă Oy, apoi precizăm situațiile posibile:

— C între O și A; D între O și B.

— C între O și A; D pe prelungirea lui OB.

— C pe prelungirea lui OA; D între O și B.

— C pe prelungirea lui OA; D situat pe prelungirea lui OB. Ne situăm în ultimul caz.

Însemnăm prin $\lambda > 0$ lungimea lui $CA = BD$. Fie $2u$ mărimea unghiului AOB și $OA = a$, $OB = b$. Stabilim coordonatele punctelor C, D și M și coeficientul director al dreptei CD, M fiind mijlocul segmentului CD.

Pentru C: $x = (a + \lambda)\cos u$; $y = (a + \lambda)\sin u$;

pentru D: $x = (b + \lambda)\cos u$; $y = -(b + \lambda)\sin u$;

pentru M: $x = \dfrac{(a + \lambda)\cos u + (b + \lambda)\cos u}{2}$,

$$y = \frac{(a + \lambda)\sin u - (b + \lambda)\sin u}{2};$$

coeficientul director al lui CD este:

$$m_{CD} = \frac{(a + \lambda) + (b + \lambda)}{(a + \lambda) - (b + \lambda)} \cdot \operatorname{tg} u.$$

Ecuația mediatoarei este:

$$y - \frac{[(a+\lambda) - (b+\lambda)]\sin u}{2} = \frac{(b+\lambda) - (a+\lambda)}{(a+\lambda) + (b+\lambda)} \cdot \frac{\cos u}{\sin u} \cdot \left[\frac{2x - (a+\lambda) - (b+\lambda)}{2} \cos u\right].$$

Odată găsită ecuația mediatoarei, problema devine simplă. Este interesant de studiat dacă punctul fix coincide pentru toate cazurile cînd C și D au poziții diferite pe Ox și Oy (dacă, bineînțeles, acesta există).

Reformulați problema în cazul în care $AC = kBD = \lambda$, k fiind un număr oarecare strict pozitiv dar fixat.

Puteți făsi sistemul de coordonate în așa fel încît ecuația mediatoarei segmentului CD să aibă o ecuație cît mai simplă?

IX.P.4[1]. Punctelor A și B le atribuim coordonatele $(a, 0)$, $(0, b)$. Ecuația dreptei AB este:

$$bx + ay - ab = 0, \; m_{AB} = -\frac{b}{a}.$$

Ecuația dreptei OC este:

$$ax - by = 0.$$

Coordonatele punctelor C, D, E, M, N:

$$C\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right), \; D(x_C, b), \; E(a, y_C), \; M(x_C, 0), \; N(0, y_C).$$

Dreptele DE și MN au ecuațiile:

$$DE \equiv b^3(a^2+b^2)x + a^3(a^2+b^2)y - ab(a^4+a^2b^2+b^4) = 0;$$

$$MN \equiv a(a^2+b^2)x + b(a^2+b^2)y - a^2b^2 = 0.$$

De aici, $m_{AB}^3 = m_{DE}$.

Determinantul format de coeficienții ecuațiilor dreptelor AB, DE, MN este zero deci dreptele sînt concurente.

Observație. Patrulaterele $BDCN$ și $AMCE$ sînt dreptunghiuri și deci diagonalele lor se taie în părți egale. Considerăm patrulaterul $DEMN$ în care I_1 și I_2 sînt mijloacele a două laturi opuse. Prelungim laturile DE și MN care se intersectează în I. Unim mijloacele laturilor; dreapta I_1I_2 trebuie să treacă tot prin I etc.

IX.P.5. Alegem drept coeficient director pentru dreapta MB pe m (variabil) pentru a obține expresii întregi pentru coordonatele punctelor B și A:

$$B(0, b - am);\ A(a + bm, 0).$$

Ecuația perpendicularei MP pe AB este:

$$(x - a)(a + bm) - (y - b)(b - am) = 0.$$

Ecuația dreptei AB este:

$$\frac{x}{a + bm} + \frac{y}{b - am} = 1.$$

Ecuația locului geometric se obține eliminînd m între ecuațiile dreptelor MP și AB.

Ecuația perpendicularei se mai poate scrie:

$$\frac{a + bm}{y - b} = \frac{b - am}{x - a} \text{ sau } \frac{a(a + bm)}{a(y - b)} = \frac{b(b - am)}{b(x - a)}$$

și apelînd la proprietatea unei suite de rapoarte (suma numărătorilor supra suma numitorilor...), obținem:

$$a + bm = \frac{(a^2 + b^2)(y - b)}{a(y - b) + b(x - a)}$$

și:

$$b - am = \frac{(a^2 + b^2)(x - a)}{a(y - b) + b(x - a)}.$$

Ecuația dreptei AB devine:

$$\frac{x[a(y - b) + b(x - a)]}{(a^2 + b^2)(y - b)} + \frac{y[a(y - b) + b(x - a)]}{(a^2 + b^2)(x - a)} - 1 = 0.$$

Eliminînd numitorii şi ordonînd, obţinem:

$$(bx + ay - ab)\,[(x - a)^2 + (y - b)^2] = 0$$

şi deci, locul geometric este dreapta de ecuaţie:

$$bx + ay - ab = 0$$

adică dreapta care trece prin punctele C şi D, care sînt proiecţiile punctului M pe axa Ox, respectiv axa Oy.

Observaţie. Cercul cu diametrul MB trece prin punctele P şi D. De asemenea, cercul cu diametrul MA trece prin punctele P şi C. Pe de altă parte, $\sphericalangle DPB = \sphericalangle BMD = \sphericalangle CMA = \sphericalangle APC$. Cum patrulaterul $DMCO$ este un dreptunghi înseamnă că semidreptele PD şi PC sînt situate pe dreapta DC care este fixă. Ca atare, punctul P descrie:

— segmentul DC, atîta timp cît A se găseşte pe Ox, iar B pe Oy;

— dreapta CD fără segmentul CD, cînd dreptele taie pe Ox' şi Oy sau Ox şi Oy'.

IX.P.6[1]. Fie $C(1, 2)$ centrul cercului şi $r(= 1)$, raza sa.

Determinăm mai întîi mulţimea punctelor P din planul cercului considerat care satisfac condiţia:

$$(x - 2)^2 + y^2 = k^2(x^2 + y^2)$$

sau:

$$(*) \qquad (1 - k^2)\,(x^2 + y^2) - 4x + 4 = 0,$$

unde $k \neq 1$. În cazul $k = 1$, rezultă $x = 1$ şi deci punctele de pe cercul considerat cu abscisa 1 sînt: $P_1(1, 1)$, $P_2(1, 3)$.

În cazul $k \neq 1$, trebuie determinate punctele de intersecţie între cercul $(*)$ şi cercul pe care se găseşte P.

Cercul $(*)$ este caracterizat de datele:

$$C'\left(\frac{2}{1 - k^2}, 0\right),\ r' = \frac{2k}{|1 - k^2|}.$$

Problema are soluții dacă $|1 - r'| \leqslant CC' \leqslant 1 + r'$ sau $(1 - r')^2 \leqslant CC'^2 \leqslant (1 + r')^2$ și cum $CC'^2 = \left(1 - \frac{2}{1 - k^2}\right)^2 + 4 = \left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2}\right)^2 + 4$ condiția devine:

$$-\frac{k}{|1 - k^2|} \leqslant 1 \leqslant \frac{k}{|1 - k^2|},$$

ceea ce înseamnă:

$$|1 - k^2| \leqslant k \text{ sau } k^4 - 3k^2 + 1 \leqslant 0.$$

Se deduce:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

În acest caz problema are două soluții distincte sau confundate.

IX.P.7. a°) Locul geometric cerut este un cerc circumscris pătratului înscris în cercul de diametru BB'. Ecuația cercului este

$$x^2 + y^2 - 2b^2 = 0.$$

Pentru punctul b°) procedăm astfel: ecuațiile:

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2},\ y = -\frac{1}{m}x + \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2},$$

reprezintă tangente paralele variabile cu direcția m, respectiv $-\frac{1}{m}$, a și b fiind semiaxele elipsei.

Eliminăm m între cele două ecuații, scrise și:

$$(y - mx)^2 = a^2m^2 + b^2;\ (my + x)^2 = (a^2 + b^2m^2).$$

Prin adunare se obține:

$$(1 + m^2)(x^2 + y^2) = (1 + m^2)(a^2 + b^2)$$

și deci:

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0.$$

IX.P.8*. Fie AB axa absciselor şi perpendiculara din vîrful C pe AB drept axă a ordonatelor, şi elementele $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ şi $C(0, c)$. Δ: $y = dx + n$, n variabil.

Pentru calcularea coordonatelor punctelor A', B', C' se folosesc sistemele:

$$\text{pentru } A': \; y = dx + n; \; y = -\frac{1}{d}(x - a)$$

deci:

$$A'\left(\frac{a - dn}{1 + d^2}, \; \frac{ad + n}{1 + d^2}\right),$$

$$\text{pentru } B': \; y = dx + n; \; y = -\frac{1}{d}(x - b)$$

deci:

$$B'\left(\frac{b - dn}{1 + d^2}, \; \frac{bd + n}{1 + d^2}\right),$$

$$\text{pentru } C': \; y = dx + n; \; y - c = -\frac{1}{d}x$$

deci:

$$C'\left(\frac{cd - dn}{1 + d^2}, \; \frac{cd^2 + n}{1 + d^2}\right).$$

Ecuaţiile perpendicularelor duse din A', B', C' pe laturile BC, CA, AB sînt:

$$\frac{b}{c}x - y + \frac{ad + n}{1 + d^2} - \frac{b}{c} \cdot \frac{a - dn}{1 + d^2} = 0,$$

$$\frac{a}{c}x - y + \frac{bd + n}{1 + d^2} - \frac{a}{c} \cdot \frac{b - dn}{1 + d^2} = 0,$$

$$x - \frac{cd - dn}{1 + d^2} = 0.$$

Se constată că determinantul alcătuit din coeficienţii necunoscutelor x, y şi din termenii liberi este nul. Punctul de concurenţă descrie o dreaptă perpendiculară pe dreapta variabilă.

IX.P.9. Sistemul de referință este format din AB — axa absciselor și perpendiculara în A pe AB — axa ordonatelor. Fie (b, o) coordonatele punctului B și fie m coeficientul director al dreptei variabile ce trece prin B, iar $y = -\frac{x}{m}$ ecuația perpendicularei din A pe dreapta $y = m(x - b)$.

Punctul P are coordonatele:

$$\left(\frac{bm^2}{1+m^2}, -\frac{bm}{1+m^2}\right); \text{ deci } AP = \frac{bm}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Condiția din enunț se scrie:

$$\frac{bm\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{\sqrt{1+m^2}} = k.$$

Se elimină parametrul m între ecuația dreptei AM și ecuația prin care se traduce condiția $\left(m = -\frac{x_M}{y_M}\right)$.

Observație. Fie $MC \perp AB$. Patrulaterul $BPMC$ este inscriptibil, iar MC este antiparalelă în triunghiul ABP.

Are loc relația:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AP} \text{ sau } AM \cdot AP = AC \cdot AB = k.$$

Cum $AB = b$ și $AC = x_M$ rezultă $x_M = \frac{k}{b}$.

IX.P.10[1]. Se consideră deci punctele $P(\lambda, \mu)$; $M(\lambda, 0)$; $N(0, \mu)$; ecuația dreptei $PQ \perp MN$ este:

$$\lambda x - \mu y + \mu^2 - \lambda^2 = 0 \text{ cu } \lambda + \mu = a.$$

Eliminînd parametrul μ între cele două ecuații se obține ecuația:

$$\lambda x - (a - \lambda)y + a^2 - 2a\lambda = 0$$

și deci, punctul fix este $I(a, a)$ (situat pe bisectoarea unghiului MON.

Observație: Folosirea conceptelor de geometrie analitică a condus ușor la rezultat. Încercați să demonstrați proprietatea enunțată în textul problemei folosind raționamente de geometrie sintetică.

IX.P.11. Fie (a, b) coordonatele punctului fix P și (x, y) coordonatele lui I, unde I este mijlocul segmentului AB. Avem caracterizarea:

$$A\left(\frac{a\lambda - b}{\lambda}, 0\right), \quad B\left(0, b + \frac{a}{\lambda}\right),$$

$$I\left(\frac{a\lambda - b}{2\lambda}, \quad \frac{b\lambda + a}{2\lambda}\right), \quad \lambda \neq a \text{ variabil.}$$

Se elimină acum λ între ecuațiile parametrice ale locului descris de I.

Ecuația obținută, $ax + by = \frac{a^2 + b^2}{2}$ arată că este vorba de o dreaptă care reprezintă mediatoarea segmentului OP.

Observații. 1°). Se poate considera ca parametru variabil, coeficientul director al dreptei variabile PA.

2°). Triunghiurile AOB și APB sînt dreptunghice, iar $IO = \frac{AB}{2}$, $IP = \frac{AB}{2}$ deci $IO = IP$ ceea ce arată că punctul I (oarecare) se găsește pe mediatoarea segmentului fix OP.

IX.P.12. Ecuațiile dreptelor sînt, în cazul cînd coordonatele lui P sînt a și b:

$$PN: y - b = \lambda(x - a); \quad PM: y - b = -\frac{1}{\lambda}(x - a).$$

Dreapta MN are ecuația:

$$\frac{x}{a - \frac{b}{\lambda}} + \frac{y}{b + \frac{a}{\lambda}} - 1 = 0.$$

Dreapta PQ are ecuația $y - b = \frac{a\lambda - b}{b\lambda + a}(x - a)$, unde Q este proiecția lui P pe MN.

Prin eliminarea lui λ între ecuațiile dreptelor MN și PQ se obține ecuația:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

care reprezintă dreapta ce trece prin $A(a, 0)$, $B(0, b)$.

Observație. Pentru rezolvarea mai rapidă a problemei, este bine să se folosească parametrul λ pentru ecuația dreptei PN și apoi $-\frac{1}{\lambda}$ pentru ecuația dreptei PM. În felul acesta, expresiile coordonatelor punctelor N și M sînt mai simple.

Sintetic, problema se poate rezolva astfel: fie Q proiecția lui P pe MN și $PA \perp Ox$, $PB \perp Oy$. Unim B cu Q și Q cu A. Patrulaterele $PAMQ$ și $PQBN$ sînt inscriptibile. Cum unghiurile APM și BNP sînt egale (cu același unghi complementar BPM), rezultă că și unghiurile AQM și BQN sînt egale și deci punctele A, Q, B sînt coliniare.

IX.P.13[1]. Fie $B(0, u)$, $C(v, 0)$ punctele variabile legate prin relația $u^2 + v^2 = a^2$. Fie A de coordonate (x, y) și $AB = c$; $AC = b$ și $b^2 + c^2 = a^2$.

Locul se obține eliminînd pe u și v între relațiile:

$$u^2 + v^2 = a^2;\ x^2 + (y - u)^2 = c^2;\ (x - v)^2 + y^2 = b^2$$

și:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Eliminînd parametrii u și v între primele relații și ținînd seama de ultima relație se obține $y = \pm\frac{bx}{c}$.

Deci locul geometric este format din două drepte care trec prin originea sistemului de referință.

IX.P.14². Fie $B(a, 0)$, $A(0, \lambda)$ și $C(x, y)$ punctele respective. Relațiile se obțin punînd condițiile:

$$BA \perp AC \text{ și deci } \lambda^2 - \lambda y + ax = 0 \qquad (1)$$

și:

$$BA = AC \text{ adică } 2y\lambda = x^2 + y^2 - a^2. \qquad (2)$$

Eliminînd parametrul λ între (1) și (2) se obține succesiv:

$$y^4 - 4axy^2 - (x^2 - a^2)^2 = 0,$$
$$y^2 = 2ax \pm (x^2 + a^2),$$

de unde:

$$y^2 = 2ax - x^2 - a^2 \text{ sau } y^2 = -(x^2 - a^2)^2$$

imposibil și:

$$y^2 = 2ax + x^2 + a^2 \text{ sau } y = \mp (x + a).$$

Rezultă dreptele $x + y = a$ și $x - y + a = 0$.

Prima ecuație reprezintă locul geometric pentru $\lambda < 0$.

Observație. Problema se poate rezolva mult mai ușor dacă se procedează astfel: se consideră perpendicularele CD și CE pe cele două axe. Triunghiurile AOB și AEC sînt egale, iar CD reprezintă suma catetelor (dacă A este situat pe Oy), diferența catetelor (dacă A este situat pe Oy') oricărui triunghi. De aici rezultă:

$$y = x + a, \quad y = -x - a,$$

și:

$$x - y = a, \; -y = a - x \text{ sau } x - y - a = 0.$$

Locul geometric este alcătuit din patru drepte:

$$x + y - a = 0; \; x - y + a = 0, \; x + y + a = 0$$

și:

$$x - y - a = 0,$$

după cum B este situat pe Ox sau Ox', iar A este situat pe Oy sau Oy'.

IX.P.15. Fie $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ și $C(0, \lambda)$ punctele respective. Cele două perpendiculare au ecuațiile:

$$\lambda y = a(x - a) \quad \text{și} \quad \lambda y = b(x - b).$$

Prin împărțirea acestor ecuații ($\lambda \neq 0$, $y \neq 0$ deci C nu se poate confunda cu originea sistemului de referință) se obține $x = a + b$ ($a \neq b$).

Locul geometric reprezintă o paralelă la axa ordonatelor.

Sintetic se poate rezolva astfel: fie $ID \perp Ox$ și $CE \perp ID$. Patrulaterul $CABI$ este înscris într-un semicerc. Triunghiurile COA și BDE sînt egale. $OA = a = BD$ și deci $OD = a + b$.

Dar OD este abscisa punctului I (intersecția perpendicularelor construite în A și B). Deci $x = a + b$. (Punctele C, A, B, E, I se găsesc pe semicercul cu diametrul CI).

IX.P.16[2]. Fie:

$$D_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0; \quad D_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

și:

$$D_3 \equiv a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

Condiția de concurență se scrie:

$$\begin{vmatrix} a_2 - \alpha a_3 & b_2 - \alpha b_3 & c_2 - \alpha c_3 \\ a_3 - \beta a_1 & b_3 - \beta b_1 & c_3 - \beta c_1 \\ a_1 - \gamma a_2 & b_1 - \gamma b_2 & c_1 - \gamma c_2 \end{vmatrix} = 0$$

sau încă:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -\alpha \\ -\beta & 0 & 1 \\ 1 & -\gamma & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

și deci $\alpha\beta\gamma = 1$ (al doilea factor nu poate fi egal cu zero).

IX.P.17. Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ vîrfurile celor două triunghiuri raportate la același sistem de referință și punctele:

$$M\left(\frac{x_2 - x_3}{1-\alpha}, \frac{y_2 - \alpha y_3}{1-\alpha}\right),$$

$$N\left(\frac{x_3 - \beta x_1}{1-\beta}, \frac{y_3 - \beta y_1}{1-\beta}\right) \text{ și } P\left(\frac{x_1 - \gamma x_2}{1-\gamma}, \frac{y_1 - \gamma y_2}{1-\gamma}\right).$$

Se scrie:

$$\text{aria } MNP = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} x_2 - \alpha x_3 & y_2 - \alpha y_3 & 1-\alpha \\ x_3 - \beta y_1 & y_3 - \beta y_1 & 1-\beta \\ x_1 - \gamma x_2 & y_1 - \gamma y_2 & 1-\gamma \end{vmatrix} = \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\alpha \\ -\beta & 0 & 1 \\ 1 & -\gamma & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1 - \alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \cdot$$

(triunghiurile se consideră orientate).

IX.P.18[2]**.** Se ține seama de problema precedentă și dacă:

1°). Punctele M, N, P sînt coliniare, atunci $S' = 0$ și deci $1 - \alpha\beta\gamma = 0$.

2°). $1 - \alpha\beta\gamma = 0$, aria ΔMNP este nulă și punctele sînt coliniare. (A se vedea și demonstrația teoremei lui *Menelau*, IX.R.5).

IX.P.19[2]**.** Laturile BC, CA, AB ale triunghiului au ecuațiile:

$$D_1 = 0 \quad D_2 = 0 \quad D_3 = 0,$$

$$D_i = a_i x + b_i y + c_i, \quad i \in \overline{1, 3}.$$

Dreptele AM, BN, CD au ecuațiile:

$$AM: D_3 + \alpha D_2 = 0; \quad BN: D_1 + \beta D_3 = 0;$$

$$CD: D_2 + \gamma D_1 = 0$$

Condiția de concurență este:

$$\begin{vmatrix} a_3 + \alpha a_2 & b_3 + \alpha b_2 & c_3 + \alpha c_2 \\ a_1 + \beta a_3 & b_1 + \beta b_3 & c_1 + \beta c_3 \\ a_2 + \gamma a_1 & b_2 + \gamma b_1 & c_2 + \gamma c_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

care se mai poate scrie:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ \beta & 0 & 1 \\ 1 & \gamma & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

și deci:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ \beta & 0 & 1 \\ 1 & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } \alpha\beta\gamma + 1 = 0. \qquad (3)$$

Dacă $\alpha\beta\gamma + 1 = 0$ atunci (1) este îndeplinită și deci dreptele AM, BN, și CP sînt ceviene (vezi IX.R.6).

IX.P.20[1]. Fie $D \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$. Condiția din enunț se scrie:

$$k_1(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p) + k_2(x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha - p) + \\ + \ldots + k_n(x_n \cos \alpha + y_n \sin \alpha - p) = 0$$

sau:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - p)k_i = 0,$$

unde (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) sînt coordonatele punctelor fixe P_i, $i \in \overline{1, n}$.

Eliminînd parametrul p între ecuația dreptei (D) și relația — condiție se obține ecuația:

$$\left(x \sum_1^n k_i - \sum_1^n k_i x_i\right) + \left(y \sum_1^n k_i - \sum_1^n k_i y_i\right) \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad (c)$$

unde α este variabil. Ecuația (c) reprezintă ecuația unui fascicul care are vîrful în punctul de coordonate:

$$x = \frac{\sum_1^n k_i x_i}{\sum_1^n k_i}, \quad y = \frac{\sum_1^n k_i y_i}{\sum_1^n k_i}.$$

IX.P.21. Putem scrie:

$$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_1};\ \overrightarrow{MA_2} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_2};\ \overrightarrow{MA_3} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_3}.$$

Prin adunare se obține:

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} = 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3}).$$

Pe de altă parte:

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3});\ \overrightarrow{A_2G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_2A_3});$$

$$\overrightarrow{A_3G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_3A_1} + \overrightarrow{A_3A_2})$$

și prin adunare se deduce, că:

$$\overrightarrow{A_1G} + \overrightarrow{A_2G} + \overrightarrow{A_3G} = 0, \text{ etc.}$$

IX.P.22. Scriem:

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{SO};\ \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SO};\ \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{SO};$$

$$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{SO}$$

și prin adunare se obține relația cerută, deoarece:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 0;\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 0.$$

IX.P.23. Deci $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0$ și $(\vec{a}-4\vec{b})\cdot$ $\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$. Rezultă $a^2=b^2=2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$ și apoi $\cos u=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{ab}=\dfrac{1}{2}$; de aici $u=60°$.

IX.P.24[1]. Dreapta AB este axa absciselor, iar perpendiculara în P pe AB reprezintă axa ordonatelor.

Ecuația cercului este:

$$(x-a)^2+y^2=R^2. \tag{1}$$

Ecuația secantei CD este:

$$y=x\cdot\operatorname{tg}u. \tag{2}$$

Notăm cu (x_1, y_1) coordonatele punctului M. Polara lui M față de cerc este:

$$x_1x+y_1y-a(x+x_1)+a^2-R^2=0. \tag{3}$$

Ecuația (3) și ecuația (2) trebuie să reprezinte aceeași dreaptă. Dar:

$$x_1=\frac{a^2-R^2}{a} \text{ și } y_1=(a-x_1)\operatorname{ctg}u$$

deci $y_1=\dfrac{R^2\operatorname{ctg}u}{a}$; $\operatorname{tg}\sphericalangle APC=\operatorname{tg}u$; $\operatorname{tg}\sphericalangle APM=$ $=\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{R^2\operatorname{ctg}u}{a^2-R^2}$.

Rezultă:

$$\operatorname{tg}\sphericalangle APC\cdot\operatorname{tg}\sphericalangle APM=\frac{R^2}{a^2-R^2}=\text{constant}.$$

IX.P.25[1]. 1°) Fie punctele $D\left(\dfrac{R}{2}, \dfrac{R}{2}\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right)$ și $E\left(-\dfrac{R}{2}, \dfrac{R}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{u}{2}\right)$. Avem ecuațiile:

$$AD: y=-(x-R)\operatorname{tg}\frac{u}{2}; \quad BE: y=(x+R)\operatorname{ctg}\frac{u}{2}.$$

Eliminînd pe u între ecuațiile dreptelor AD, BE se obține ecuația cercului cu diametrul AB.

2°). Coordonatele punctelor M și C sînt:

$$(-R\cos u,\ R\sin u),$$
$$(R\cos u,\ R\sin u).$$

De aici rezultă că $MC \parallel AB$.

3°). Triunghiul OCD este dreptunghic în O. Ecuația cercului circumscris acestui triunghi este:

$$x^2 + y^2 - \frac{R}{\sin u} \cdot y = 0$$

și este verificată și de coordonatele punctelor E și M.

Observație Punctele C, M sînt simetrice față de axa Oy.

IX.P.26. Se consideră originea sistemului de referință în A, iar axa ordonatelor dreapta AB. Cele două cercuri au ecuațiile:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0 \text{ și } x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y = 0.$$

Se obține:

$$AC^2 = \frac{4b^2(a'-a)^2}{a^2+b^2},\quad BC = 2b\sqrt{\frac{a'^2+b^2}{a^2+b^2}}$$

și analog:

$$AD^2 = \frac{4b^2(a-a')^2}{a'^2+b^2},\quad BD = 2b\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a'^2+b^2}}.$$

IX.P.27[1]. Se poate alege sistemul de referință astfel încît să avem situația:

$$A(0,\ a),\ B(b,\ 0),\ C(c, 0),$$

iar pentru ortocentru:

$$H\left(0,\ -\frac{bc}{a}\right).$$

Cercurile construite pe laturi au ecuațiile:

(AC): $x^2 + y^2 - cx - ay = 0$,

(AB): $x^2 + y^2 - bx - ay = 0$,

(BC): $x^2 + y^2 - (b+c)x + bc = 0$.

Centrul radical se află la intersecția axelor radicale. Rezolvînd sistemul format din ecuațiile a două din axele radicale, rezultă:

$$x = 0;\ bx - ay - bc = 0;\ x = 0,\ y = \frac{bc}{a},\ \text{etc.}$$

IX.P.28. Punctul fix este originea sistemului de referință. Perpendiculara din O pe cele două drepte paralele, fixe, reprezintă axa absciselor. Cele două drepte paralele au ecuațiile:

$$x = a,\ x = b.$$

Pe de altă parte avem punctele $A(a, \lambda)$, $B(b, \mu)$; $\sphericalangle AOx = \theta$ și $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda}{a}$, $\sphericalangle BOx = \theta$; $\operatorname{tg} \theta = \frac{\mu}{b}$; $\sphericalangle BOA = 90°$.

Deci:

$$\lambda\mu + ab = 0. \tag{1}$$

Ecuația perpendicularei din O pe AB este:

$$y = \frac{a - b}{\mu - \lambda}\, x. \tag{2}$$

Ecuația dreptei AB este:

$$y - \mu = \frac{\mu - \lambda}{b - a}\,(x - b). \tag{3}$$

Din (2) și (3) se obțin valorile lui λ și μ în funcție de x și y:

$$\mu = \frac{x^2 + y^2 - bx}{y};\ \lambda = \frac{x^2 + y^2 - ax}{y}.$$

Înlocuind în (1), obținem:

$$x^2 + y^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

care reprezintă ecuația unui cerc cu centrul pe axa absciselor (s-a simplificat prin $x^2 + y^2 > 0$).

IX.P.29[1]**.** Fie $M(\lambda, \mu)$ punctul variabil. Tangenta în acest punct are ecuația $y\mu = p(x + \lambda)$. Se obțin coordonatele lui $I: x = -\lambda$, $y = -\mu$.

Deoarece $\mu^2 = 2p\lambda$, rezultă locul lui I: $y^2 = -2px$, care reprezintă o parabolă simetrică parabolei considerate în raport cu axa Oy. I este simetricul lui M în raport cu originea.

Rezultatul se poate obține mai ușor dacă se ține seama că subtangenta TM' are mijlocul în O. Patrulaterul $TIM'M$ fiind paralelogram, punctul I descrie curba simetrică celei descrise de M (M' este proiecția lui M pe axa de simetrie a parabolei).

IX.P.30. Fie $M_0(x_0, y_0)$ pe hiperbolă. Tangenta în M_0 taie asimptotele în M_1 și M_2 ale căror coordonate rezultă ca soluții ale sistemelor:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{y_0y}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} \dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{y_0y}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0. \end{cases}$$

Calculînd pantele dreptelor FM_1, FM_2 și apoi unghiul format de aceste drepte, se obține $\operatorname{tg} V = \dfrac{b}{a}$.

IX.P.31[2]**.** Ecuația dreptei AB este $y = \left(x - \dfrac{p}{2}\right) \operatorname{tg} \alpha$. Notînd cu (x_1, y_1), (x_2, y_2) coordonatele punctelor A, B rezultă:

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \\ = [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha),$$

unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației:

$$x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - p(2 + \operatorname{tg}^2 \alpha)\, x + \frac{p^2}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha = 0,$$

$$AB \sin^2 \alpha = 2p \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha = 2p.$$

Pentru calculul coardei CD, se înlocuiește α prin $\frac{\pi}{2}+\alpha$: $CD\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2p$; $CD\cdot\cos^2\alpha=2p$.

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{\frac{2p}{\sin^2\alpha}}+\frac{1}{\frac{2p}{\cos^2\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2p}=\frac{1}{2p}.$$

IX.P.32[1]. Se știe că mulțimea punctelor din care se pot duce tangente reciproc perpendiculare la parabola $y^2=2px$, este directoarea parabolei.

Dacă $y=mx+\frac{p}{2m}$ reprezintă o tangentă, cealaltă tangentă dusă din același punct de pe directoare la aceeași parabolă are ecuația $y=-\frac{x}{m}-\frac{mp}{2}$.

Cele două tangente se intersectează în:

$$M\left(-\frac{p}{2},\ \frac{p}{2m}(1-m^2)\right).$$

Punctele de tangență sînt:

$$A\left(\frac{p}{2m^2},\ \frac{p}{m}\right),\quad B\left(\frac{pm^2}{2},\ -pm\right).$$

$$a^2=\frac{p^2}{4}\cdot\frac{(m^2+1)^3}{m^4},\quad b^2=\frac{p^2}{4}\cdot\frac{(m^2+1)^3}{m^2}.$$

Pentru parabola $y^2=2px$, suma în cauză este egală cu $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{p^2}{4}}}$ etc.

IX.P.33[1]. Fie $y=m\left(x-\frac{p}{2}\right)$ ecuația coardei și $y^2=2px$ ecuația parabolei.

Eliminînd y între cele două ecuații se obține ecuația în x:

$$4m^2x^2-4p(2+m^2)x+m^2p^2=0$$

și deci $x_1x_2 = \frac{p^2}{4}$ (rezultatul este valabil întrucît $x_1 > 0,\ x_2 > 0$).

Pe de altă parte:

$$y_1^2 = 2px_1;\ y_2^2 = 2px_2 \text{ deci } (y_1y_2)^2 = 4p^2 \cdot x_1x_2,$$

$(y_1y_2)^2 = p^4$ de unde $y_1y_2 = -p^2$, întrucît $y_1y_2 < 0$.

IX.P.34. Fie $\left(\frac{y_1^2}{2p},\ y_1\right)$ coordonatele unui punct T_1 de contact și $y_1y = p\left(x + \frac{y_1^2}{2p}\right)$ ecuația tangentei în acest punct.

Fie d_1^2 pătratul distanței de la focarul $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ la tangentă:

$$d_1^2 = \frac{p^2 + y_1^2}{4}.$$

Fie v_1 lungimea razei vectoare corespunzătoare lui T_1:

$$v_1 = \frac{p^2 + y_1^2}{2p}.$$

De aici $\frac{d_1^2}{v_1} = \frac{p}{2}$, ceea ce arată că raportul este constant.

Dacă T_2 este al doilea punct de contact și d_2^2, v_2 au aceleași semnificații, atunci:

$$\frac{d_1^2}{v_1} = \frac{d_2^2}{v_2} = \frac{p}{2}.$$

IX.P.35[2]. Fie $A\left(\frac{y_1^2}{2p},\ y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{2p},\ y_2\right)$ și $C\left(\frac{y_3^2}{2p},\ y_3\right)$ cele trei puncte într-un sistem xOy.

Tangentele au ecuațiile:

$$y_1 y = p\left(x + \frac{y_1^2}{2p}\right), \text{ (în } A\text{)},$$

$$y_2 y = p\left(x + \frac{y_2^2}{2p}\right), \text{ (în } B\text{)},$$

$$y_3 y = p\left(x + \frac{y_3^2}{2p}\right), \text{ (în } C\text{)}.$$

Tangenta în A și tangenta în B se taie în:

$$C'\left(\frac{y_1 y_2}{2p}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right);$$

Tangenta în B și tangenta în C se taie în:

$$A'\left(\frac{y_2 y_3}{2p}, \frac{y_2 + y_3}{2p}\right);$$

Tangenta în C și tangenta în A se taie în:

$$B'\left(\frac{y_1 y_3}{2p}, \frac{y_1 + y_3}{2p}\right).$$

aria $ABC =$

$$= \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{y_1^2}{2p} & y_1 & 1 \\ \frac{y_2^2}{2p} & y_2 & 1 \\ \frac{y_3^2}{2p} & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4p} \cdot |(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)|$$

(determinant *Vandermonde*).

aria $A'B'C' =$

$$= \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{y_1 y_2}{2p} & \frac{y_1 + y_2}{2} & 1 \\ \frac{y_2 y_3}{2p} & \frac{y_2 + y_3}{2} & 1 \\ \frac{y_3 y_1}{2p} & \frac{y_3 + y_1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{8p} \begin{vmatrix} y_1 y_2 & y_1 + y_2 & 1 \\ y_2 y_3 & y_2 + y_3 & 1 \\ y_2 y_1 & y_3 + y_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ultimul determinant se poate scrie:

$$\begin{vmatrix} y_1y_2 & y_2 & 1 \\ y_2y_3 & y_2 & 1 \\ y_3y_1 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1y_2 & y_1 & 1 \\ y_2y_3 & y_3 & 1 \\ y_3y_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= y_2(y_3 - y_1)(y_3 - y_2) - y_1(y_3 - y_1)(y_3 - y_2).$$

Deci:

$$\text{aria } A'B'C' = \frac{1}{8p} |(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)|.$$

Am realut această problemă (vezi IX.R.12) din dorința de a sublinia încă odată că este necesar (și util) să se revadă anumite fapte și nu în convingerea că problema în sine sau soluția ei ar puncta aspecte interesante.

ARITMETICA ŞI TEORIA NUMERELOR

X.0.0. Definiţii. Notaţii. Preliminarii.
În acest capitol, pentru a păstra tradiţia, presupunem pe N, mulţimea numerelor naturale, fără zero.

X.0.1. *Teoremă* (Principiul lui *Dirichlet*). Fie un şir de numere naturale care formează o submulţime mărginită a lui N, M fiind cel mai mare element al acestei submulţimi, $I = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $a_k = M$.

Dacă are loc $k > M$, k finit, sau dacă are loc $k = +\infty$ atunci există cel puţin două elemente ale mulţimii I, cu indici diferiţi, egale între ele.

Demonstraţia este imediată.

X.0.2. *Definiţie.* Fie a, b două numere naturale. Spunem că a este un *divizor* al lui b şi scriem $b \vdots a$ sau $a \mid b$ (citim: a divide pe b sau b se divide prin a) dacă există un număr natural c astfel încît $b = ac$. Dacă $a = 1$ sau $a = b$ spunem că a este un *divizor impropriu* al lui b şi *propriu* în caz contrar.

X.0.3. *Exemple.* Este clar că 2 este un divizor propriu al lui 4 căci $4 = 2 \cdot 2 \vdots 2$ şi $2 \neq 4$, respectiv $2 \neq 1$. De asemenea, 9 este un divizor propriu al lui 81 dar 81 este un divizor impropriu al acestuia.

Vom folosi în cele ce urmează, afară de cazurile cînd se va specifica expres altfel, numai numere naturale.

Convenim să notăm prin $*[a, b]$ *cel mai mic multiplu comun* (c.m.m.m.c.) al numerelor a şi b iar prin $*(a, b)$ *cel mai mare divizor comun* (c.m.m.d.c.) al lor. În majoritatea cazurilor cînd $*(a, b) = 1$ se mai spune că a şi b sînt *(relativ) prime între ele.*

X.0.4. *Definiție.* Numim *număr prim* orice număr natural $p > 1$ care fiind divizor al unui produs de doi factori, el divide măcar pe unul, adică dacă $p \mid ab$ atunci sau $p \mid a$ sau $p \mid b$ (în toate cazurile cînd p divide un produs de doi factori).

Noțiunea de *număr nedecompozabil* (sau încă *ireductibil*) este strîns legată, în cadrul numerelor naturale, de cea de număr prim:

X.0.5. *Definiție.* Un număr natural diferit de 1 se numește *nedecompozabil* dacă nu admite divizori proprii. Oricare alt număr care admite divizori proprii se numește *compus* sau *decompozabil.*

Următoarea teoremă clarifică lucrurile:

X.0.6. *Teoremă.* Un număr este nedecompozabil dacă și numai dacă este un număr prim.

Demonstrație. Dovedim implicația $\Rightarrow$. Fie $a > 1$ un număr nedecompozabil. Dacă b este un alt număr natural atunci $_*(a, b) = a$ sau $_*(a, b) = 1$; în adevăr, nu putem avea $1 < d = {}_*(a, b) < a$, căci atunci $d \mid a$ și a ar fi decompozabil (compus). Dacă $_*(a, b) = a$, urmează $a \mid b$; dacă $_*(a, b) = 1$ atunci a și b sînt prime între ele. Fie acum $a \mid a_1 a_2$. Dacă am presupune $a \nmid a_1$ și $a \nmid a_2$, conform celor precedente am obține $_*(a, a_1) = 1$ și $_*(a, a_2) = 1$, absurd. Deci din $a \mid a_1 a_2$ rezultă $a \mid a_1$ sau $a \mid a_2$. În adevăr, dacă $a \mid bc$ și $_*(a, b) = 1$ atunci, cu necesitate, $a \mid c$ căci din faptul că a și b sînt (relativ) prime între ele, rezultă $_*[a, b] = ab$ și cum $a \mid bc$ și $b \mid bc$, rezultă că bc este multiplu comun de a și b deci bc trebuie să se dividă prin c.m.m.d.c. al numerelor a și b, adică prin produsul ab, $ab \mid bc$, de unde, cu necesitate $a \mid c$. Oricum, a este număr prim.

Reciproc, dacă $p = ab$ este prim și a este divizor propriu, obținem $1 < a < p$ deci $1 < b < p$; relația $p = ab$ arată însă că ab este divizor impropriu al lui p, $p \mid ab$, deci, conform definiției numărului prim, $p \mid a$ sau $p \mid b$, deci $p < a$ sau $p < b$ ceea ce vine în contradicție cu rezultatele stabilite anterior. Rezultă cu necesitate, $p = a$ și $b = 1$ sau $p = b$ și $a = 1$.

În felul acesta, definiția: „$a \in N$ este număr prim dacă admite numai doi divizori, pe 1 și a" capătă o justificare riguroasă, în sensul echivalenței celor două definiții.

Modalitățile cum se găsesc c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c a două numere fiind, presupunem, cunoscute, nu le mai descriem aici. Reținem însă următoarele *proprietăți* importante:

X.0.7. $*(ta, tb) = t*(a, b)$;

X.0.8. $*[ta, tb] = t*[a, b]$;

X.0.9. $*(\mu a + vb, \mu_1 a + v_1 b) \geqslant *(a, b)$;

X.0.10. $*(a, b) *[a, b] = ab$;

X.0.11. $*[a, a] = a$, $*(a, a) = a$ (idempotență);

X.0.12. $*[a, b] = *[b, a]$, $*(a, b) = *(b, a)$ (comutativitate);

X.0.13. $*[a, *[b, c]] = *[*[a, b], c]$ (asociativitate);

X.0.14. $*(a, *(b, c)) = *(*(a, b), c)$ (asociativitate);

X.0.15. $*[a, *(a, b)] = a$,
$*(a, *[a, b]) = a$ (absorbție).

X.0.16. *Definiție.* O mulțime L dotată cu două legi, $\vee$, $\wedge$: $L^2 \to L$ care satisfac relații analoage proprietăților X.0.11 — X.0.15 se numește *latice*.

Demonstrăm numai relațiile X.0.7 — X.0.10, celelalte fiind evidente.

Demonstrăm pentru început X.0.10. Dacă $a = b$, relația se verifică imediat; de asemenea, se verifică și dacă $a = 1$ sau $b = 1$.

Folosim X.0.18, scriind:

$$a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$
$$b = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$$

Cum:

$$*(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}$$
$$*[a, b] = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}$$

rezultă:

$$*(a,b)\,*[a,b]=p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}+\max\{\alpha_1,\beta_1\}}\ldots p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}+\max\{\alpha_k,\beta_k\}}$$

și cum:

$$\min\{\alpha_i,\ \beta_i\}+\max\{\alpha_i,\ \beta_i\}=\alpha_i+\beta_i$$

rezultă afirmația.

Demonstrăm X.O.7 și X.O.8. Cum egalitatea din X.O.8 rezultă din X.O.7, folosind X.O.10, este suficient să demonstrăm numai X.O.7. Fie $d_1=*(ta,\ tb)$ și $d_2=*(a,\ b)$. Trebuie arătat că $d_1=td_2$. În adevăr, deoarece $d_2=*(a,\ b)$, obținem $a=a'd_2$, $b=b'd_2$ unde $*(a',\ b')=1$. Dar și $ta=a'(td_2)$, $tb=b'(td_2)$ ceea ce arată că td_2 este divizor comun pentru ta și tb deci $td_2|\,d_1$ adică $d_1=td_2s$. În fine, $ta=d_1a''=td_2sa''$ deci $a=d_2sa''=a'd_2$ deci $a'=sa''$. Analog, $b'=sb''$. Cum $*(a',\ b')=1$, rezultă $s=1$ deci $d_1=td_2$ deci și afirmația.

În fine, dovedim X.O.9. În adevăr, orice divizor comun al lui a și b este divizor comun și pentru $\mu a+vb$, μ_1a+v_1b. Notînd $a_1=\mu a+vb$, $b_1=\mu_1a+v_1b$ obținem că mulțimea divizorilor comuni pentru a și b este inclusă în mulțimea divizorilor comuni pentru a_1 și b_1 deci $d_1\geqslant d$, dacă notăm $d_1=*(a_1,\ b_1)$ și $d=*(a,\ b)$.

Trecem acum la demonstrația a patru teoreme importante ale aritmeticii și, respectiv, teoriei numerelor, anume:

X.0.17. *Teoremă.* Numerele prime (deci nedecompozabile) sînt infinite *(Euclid)*.

X.0.18. *Teoremă.* Orice număr natural mai mare decît 1 se poate descompune într-un produs de factori primi între ei, doi cîte doi, în mod unic, abstracție făcînd de ordinea lor; factorii sînt puteri naturale ale unor numere prime (de altfel, această teoremă a fost utilizată în paginile anterioare).

X.0.19. *Teoremă.* Cel mai mare divizor comun a două numere a, b este ultimul rest diferit de 0 al împărțirilor succesive ($a > b$):

$$\begin{aligned}
a &= bq + r & 0 < r < b,\\
b &= rq_1 + r_1 & 0 < r_1 < r,\\
r &= r_1q_2 + r_2 & 0 < r_2 < r_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{s-2} &= r_{s-1}q_s + r_s & 0 < r_s < r_{s-1},\\
r_{s-1} &= r_sq_{s+1}
\end{aligned}$$

adică: $r_s = d = *(a, b)$ (algoritmul lui *Euclid*).

X.0.20. *Teoremă.* Dacă d este c.m.m.d.c. al numerelor a, b atunci există u și v astfel încît:

$$d = ua - vb \quad \text{sau} \quad d = vb - ua$$

și, de aici:

X.0.20.1. *Teoremă.* Condiția necesară și suficientă ca numerele a, b să fie prime între ele este ca să se găsească două numere u și v astfel încît:

$$1 = ua - vb \quad \text{sau} \quad 1 = vb - ua.$$

Demonstrație. Demonstrăm întîi X.O.17. Vom da acestei teoreme o demonstrație, folosind o idee a lui *Euclid*. Vom însemna, de aici încolo, în afară de cazurile cînd se va specifica expres altfel, prin p_n al n-lea număr prim (este clar că $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ etc.), cu $\pi(x)$ vom însemna, așa cum se face de obicei, numărul de numere prime care nu depășesc pe x (așa, de pildă, $\pi(0{,}2) = \pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3{,}7) = 2$ etc.).

De asemenea, vom însemna prin $\tau(n)$ numărul divizorilor lui n, inclusiv 1 și n iar $\varphi(n)$ numărul de numere naturale mai mici decît n și (relativ) prime cu n.

Reținem, de asemenea, funcția lui *Möbius*:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } n = 1,\\ 0 \text{ dacă există } p, \text{ număr prim, încît } p^2 \mid n,\\ (-1)^k \text{ dacă } n = p_1' \dots p_k', \text{ cu } p_i' \neq p_j', \ p_i' \\ \qquad \text{fiind numere prime;} \end{cases}$$

și, de asemenea, funcția lui *Mangoldt*:

$$\lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{dacă } n = p^m \\ 0 & \text{dacă } n \neq p^m \end{cases} \quad m \in N,$$

p fiind un număr prim oarecare, foarte utile în considerațiile din partea finală a capitolului de teoria numerelor din această lucrare.

Pe măsură ce vom aprofunda considerațiile noastre vom introduce și alte elemente.

Demonstrăm dar afirmația X.O.17. Fie $p_1 = 2$; 2 este nedecompozabil, căci dacă $q \mid 2$ urmează $q = 1$ sau $q = 2$ (dacă $1 < q < 2$, urmează $2 = q + u$ și $q = 1 + v$ deci $2 = 1 + (u + v) = 1 + 1$ adică $1 = u + v$, absurd).

Se construiește apoi un șir recurent de numere nedecompozabile prin considerarea celor mai mici divizori p_i diferiți de 1 ai următorului șir $\{p_i\}$:

$$p_2 \mid p_1 + 1,\ p_3 \mid p_1 p_2 + 1,\ \ldots,\ p_i \mid p_1 \ldots p_{i-1} + 1.$$

Toate numerele sînt nedecompozabile; în adevăr, $p_i > 1$ și au proprietatea de elemente minimale în mulțimea divizorilor numerelor respective.

Oricare două din aceste numere sînt diferite între ele căci dacă $p_h = p_k$ și $h < k$, cum:

$$p_k \mid p_1 p_2 \ldots p_h \ldots p_{k-1} + 1$$

urmează:

$$p_1 p_2 \ldots p_h \ldots p_{k-1} + 1 = l p_k = l p_h$$

deci:

$$p_h (l - p_1 p_2 \ldots p_{h-1} p_{h+1} \ldots p_{k+1}) = 1,$$

absurd.

Mulțimea $\{p_1, p_2, \ldots\}$ nu poate fi finită căci dacă ar fi așa în această mulțime ar exista un element maximal p, cu toți $p_i \leqslant p$ și deci, în conformitate cu principiul lui *Dirichlet*, ar exista $p_j = p_i$, cu $i \neq j$, caz exclus. Oricum, afirmația este dovedită.

Putem simplifica demonstrația. Presupunem, prin absurd, că mulțimea numerelor prime este finită. Fie $p_1, \ldots, p_k$ aceste numere. Numărul:

$$N_k = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$$

este sau prim sau compus *(tertium non datur)*. Dacă N_k este număr prim atunci, evident, $N_k > p_k$, contrar proprietății de maximalitate a lui p_k. Rămîne că N_k este compus. Dar în acaz acest avem, din teorema X.O.18 pe care o vom demonstra imediat, că N_k se divide cu un număr prim p_l. Dar p_l nu poate fi nici unul din numerele $p_1, \ldots, p_k$ deoarece, dacă ar fi așa, am obține:

$$p_1 \ldots p_k + 1 = hp_l$$

adică:

$$p_l(h - p_1 \ldots p_{l-1} p_{l+1} \ldots p_k) = 1,$$

absurd. Ca atare $p_l > p_k$, contrar proprietății de maximalitate a lui p_k. În ambele cazuri, presupunerea că numărul numerelor prime este finit ne-a condus la o absurditate deci rămîne că acest număr este infinit.

Se poate demonstra afirmația teoremei arătînd că între n și $n!$, $n \geqslant 3$, există cel puțin un număr prim și se construiește apoi șirul:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 3!,\ x_3 = (3!)!,\ \ldots,\ x_n = ((\ldots(3!)!\ldots)!)$$

unde numărul semnelor! în scrierea lui x_n este $n - 1$. Evident, pentru un asemenea raționament, în loc de 3 putem lua oricare alt număr natural $k > 3$.

Demonstrăm X.O.18. Fie a un număr natural și $a > 1$. Dacă a este prim, $a = p_k$ reprezintă descompunerea lui a cu singurul factor prim p_k. Dacă a este compus, atunci el admite, potrivit definiției, un cel mai mic divizor (în raport cu relația $\leqslant$) care este număr prim (dintre divizorii proprii ai lui a). În adevăr, a fiind compus, mulțimea divizorilor lui a, din care este exclus 1, are un element minimal p_1'; dar p_1' este nedecompozabil, deci prim, căci $1 < p_1'$ și apoi p_1' nu admite divizori propri, căci dacă ar exista, acesta ar fi divizor al lui a, contrar proprietății de minimalitate a lui p_1'. Așadar, $a = p_1' a_1$, unde $a_1 < a$. Cu a_1 se procedează analog: se ia cel mai mic divizor propriu al lui, fie acesta p_2', deci $a_1 = p_2' a_2$ și astfel $a = p_1' p_2' a_2$ cu $a_2 < a_1$. Se continuă procedeul și cum mulțimea factorilor a_i formează un șir descrescător de numere naturale,

după un număr finit de pași vom ajunge la un factor a_h, nedecompozabil, adică $a_h = p'_{k+1}$. Deci:

$$a = p'_1 p'_2 \dots p'_k p'_{k+1}.$$

Descompunerea este unică, abstracție făcînd de ordinea termenilor, căci dacă:

$$a = p'_1 \dots p'_{k+1} = q_1 \dots q_h$$

va trebui:

$$q_i \mid p'_1 \dots p'_{k+1}, \quad (\forall) i \in \{1, 2, \dots, h\}$$

deci $q_i \mid p'_j$ de unde $q_i = p'_j$. Deci putem simplifica în penultima egalitate q_i cu p'_j. Dacă presupunem $h < k + 1$, iterînd (adică repetînd) procedeul simplificării, ar urma ca în membrul stîng să rămînă $k + 1 - h$ factori primi iar în membrul drept numărul 1, absurd, căci $p_i > 1$ pentru toți i. Deci $h = k + 1$ și fiecare q_i este egal cu un p'_j corespunzător.

Descompunerea unui număr a în factori primi poartă denumirea de *descompunerea canonică* a lui a și în ea unii factori se pot repeta; în general descompunerea se prezintă sub forma:

$$a = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k}$$

cu $p_i = p_j$ pentru $i = j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ iar t_i sînt toate sau numere naturale sau unele egale cu zero. Reținem, în cele mai frecvente cazuri, în descompunerea canonică, numai acele numere p_i care au puterea diferită de zero.

Amintindu-ne definițiile c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c a a două numere:

$$a = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k}$$
$$b = p_1^{v_1} \dots p_k^{v_k}$$

(putem face în așa fel încît descompunerea „redusă" a numerelor a și b să apară același număr de numere prime, completînd descompunerea unuia dintre ei cu factorii celuilalt (folosind exponenți egali cu zero), găsim:

$$d = {}_*(a, b) = p_1^{\min\{t_1, v_1\}} \dots p_k^{\min\{t_k, v_k\}},$$
$$m = {}_*[a, b] = p_1^{\max\{t_1, v_1\}} \dots p_k^{\max\{t_k, v_k\}}.$$

Trecem acum la demonstrația teoremei X.O.19. Dacă $a > b$ și $a = bq + r$ atunci $*(a, b) = *(b, r + bq) = *(b, r)$ și, în continuare:

$$*(a, b) = *(b, r) = *(r, r_1) = \ldots = *(r_{s-1}, r_s) = r_s$$

ceea ce demonstrează afirmația.

De aici rezultă:

$$r_k = u_k a - v_k b \quad \text{dacă avem} \quad k = 2h$$

și:

$$r_k = v_k b - u_k a \quad \text{dacă avem} \quad k = 2h + 1$$

unde u_k, v_k sînt numere naturale.

În adevăr, din prima relație:

$$r = a - bq$$

apoi:

$$r_1 = b - rq_1 = b - (a - bq)\, q_1 = (1 + qq_1)\, b - q_1 a$$

adică:

$$v_1 = 1 + qq_1, \; u_1 = q_1$$

deci, cum $r_2 = r - r_1 q_2 = (1 + q_1 q_2)\, a - (q + q_2 + qq_1 q_2)\, b$ rezultă:

$$u_2 = 1 + q_1 q_2, \; v_2 = q + q_2 + qq_1 q_2.$$

În general, dacă:

$$r_{k-2} = u_{k-2} a - v_{k-2} b,$$
$$r_{k-1} = v_{k-1} b - u_{k-1} a$$

(k par) atunci:

$$r_k = r_{k-2} - r_{k-1} q_k = (u_{k-2} + q_k u_{k-1})\, a - (v_{k-2} + q_k v_{k-1})\, b$$

iar din:

$$r_{k-1} = v_{k-1} b - u_{k-1} a,$$
$$r_k = u_k a - v_k b$$

deducem:

$$r_{k+1} = r_{k-1} - r_k q_{k+1} = (v_{k-1} + q_{k+1} v_k)\, b - (u_{k-1} + q_{k+1} u_k)\, a.$$

Ca atare, pentru determinarea coeficienților u_k și v_k se pot stabili următoarele relații de recurență:

$$u_k = q_k u_{k-1} + u_{k-2},\ v_k = q_k v_{k-1} + v_{k-2}.$$

De aici, făcînd $d = r_s = u_s a - v_s b$ dacă s este par și $d = v_s b - u_s a$ dacă s este impar, rezultă afirmația teoremei X.O.20.

Afirmația X.O.20 arată că cea din teorema X.O.20.1 este necesară și suficientă căci din $x \mid a$ și $x \mid b$ rezultă, cu necesitate, $x = 1$.

Din considerații de ordin practic pe care am avut de nenumărate ori ocazia să le cunoaștem — cel mai frecvent exemplu, calculatorul electronic — pentru simplificarea unor raționamente, a posibilităților de modelare ale proceselor fizice ori abstracte, s-a constatat că este incomodă folosirea a zece simboluri, cum se obișnuiește în practică: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. S-au căutat, în felul acesta, alte modalități de a scrie numerele pe care le utilizăm în mod curent, în calcule, în altă *bază* decît baza 10 (în care folosim 10 simboluri, anume cele enumerate mai sus). Dacă folosim, de exemplu, numai 7 simboluri, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, este natural să considerăm numerele în baza 7. Modul cum se trece de la baza 10 la baza 7 (sau invers) și de ce trebuie folosite numai cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 și nu altele vor fi arătate mai jos.

Cel mai comod este să considerăm numerele în baza de numerație 2 întrucît sînt folosite numai două simboluri, 0 și 1.

Să considerăm numărul 104. Împărțit la 2 el dă cîtul 52 și restul 0. Reținem acest rest. Împărțind, în continuare, pe 52 la 2 obținem cîtul 26 și restul 0. Reținem acest rest. Este clar că restul obținut prin împărțirea unui număr oarecare $a \in N$ la $b \in N$, $a > b$, este mai mic decît b. Continuînd raționamentul anterior

obținem un șir finit de resturi, care pot fi 0 sau 1 și un cît final, potrivit schemei:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
104 & 2 & & & & & & & & \\
10 & 52 & 2 & & & & & & & \\
=4 & 4 & 26 & 2 & & & & & & \\
4 & 12 & 2 & 13 & 2 & & & & & \\
0 & 12 & =6 & 12 & 6 & 2 & & & & \\
 & =0 & 6 & =1 & 6 & 3 & 2 & & & \\
 & & 0 & & 0 & 2 & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & & &
\end{array}
$$

Reținem ultimul cît, în cazul acesta 1, și resturile obținute de jos în sus, pe care le scriem unele după altele:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\text{cîtul} & \text{ultimul rest} & \ldots & & & &
\end{array}
$$

Scrierea 1101000 nu este altceva decît reprezentarea numărului 104 în baza 2, determinată de împărțitorul folosit. Scriem:

$$104_{(10)} = 1101000_{(2)}.$$

Scrierea unui număr din baza 10 în baza 2 este, evident, unică deoarece resturile împărțirilor efectuate sînt unice[1]. Modul de a trece de la baza 2 la baza 10 este imediat:

$$1101000_{(2)} = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + \\ + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6$$

și se justifică prin aceea că dacă în sistemul:

$$
\begin{aligned}
a &= bq + r_1, \\
b &= b_1 q + r_2, \\
&\vdots \\
b_s &= b_{s+1} q + r_{s+2}
\end{aligned}
$$

r_{s+2} fiind ultimul rest, $b_{s+1} < q$, eliminăm pe $b, b_1, \ldots, b_s$ obținem:

$$a = r_1 + r_2 q + \ldots + r_{s+2} q^{s+1} + b_{s+1} q^{s+2}$$

[1] În inele oarecare, resturile nu sînt, în general, unice.

scrierea lui a în baza q fiind:

$$a_{(10)} = \overline{b_{s+1} r_{s+2} \dots r_{1(q)}}$$

unde bara superioară arată că scrierea de sub ea nu este un produs, ci un număr cu cifrele b_{s+1}, r_{s+2}, ..., r_1 (în loc de baza 2 am ales o bază oarecare q).

Este clar că simbolul 16 poate fi o cifră a unui număr, dacă folosim, de exemplu, scrierea în baza 34 ($q = 34$).

Reluînd o observație făcută anterior, este evident că într-o bază oarecare q nu pot exista cifre mai mari sau egale cu q deoarece resturile obținute la împărțirile efectuate sînt mai mici decît q.

Un număr cu zecimale, fie de exemplu $t = 0{,}345$, admite și scrierea:

$$t = \frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{5}{10^3}.$$

Rezultă deci că numerele zecimale din baza 10 pot fi scrise ca numere zecimale în baza q, arbitrar aleasă; dacă $\overline{0, a_1 \dots a_{k(q)}}$ este această scriere atunci modul de trecere la baza 10 este imediat (pentru cazul lui t):

$$t = \frac{a_1}{q} + \dots + \frac{a_k}{q^k}.$$

Alte precizări le vom face pe parcurs (în măsura în care exercițiile propuse spre rezolvare le vor solicita).

Pentru a arăta că a este multiplu de b, vom scrie adesea $a = \mathfrak{M}b$. Reținem, de asemenea:

$$(a + b)^n = \mathfrak{M}a + b^n = \mathfrak{M}b + a^n$$

deoarece, potrivit dezvoltării binomului după *Newton*:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

iar în membrul drept primii n termeni se divid cu a (respectiv ultimii n termeni se divid cu b).

Vom omite, cum se face de obicei, scrierea $M_{(10)}$ pentru a arăta că M este în baza 10, vom scrie, simplu, M.

De asemenea, reamintim formulele:

$$a^n + b^n = (a + b)\,(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}),$$

$$a^n - b^n = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$$

cînd n este impar și:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{q^n - 1}{q - 1},\ q \neq 1,$$

pe care le vom folosi frecvent în această secțiune.

PROBLEME REZOLVATE

X.0.R.1. Produsul a trei sau patru numere naturale consecutive nu poate fi nici pătrat perfect, nici cub perfect.

Soluție. Fie trei numere naturale consecutive, $x - 1$, x, $x + 1$ cu $x > 1$.

Evident:

$$(x - 1)\,x(x + 1) = x(x^2 - 1) = x^3 - x.$$

Cum x și $x^2 - 1$ nu au nici un divizor comun (dacă ar avea, acesta ar divide și numărul $x \cdot x - (x^2 - 1) = 1$) rezultă că atît x cît și $x^2 - 1$ trebuie să fie pătrate perfecte deci $x = a^2$, $x^2 - 1 = b^2$, $a, b \in N$. Din a doua relație găsim $(x - b)\,(x + b) = 1$, de unde $x - b = 1$ și $x + b = 1$, absurd. Deci produsul considerat nu poate fi pătrat perfect. El nu poate fi nici cub perfect căci $(x - 1)^3 < x^3 - x < x^3$ pentru orice $x > 1$.

Pentru patru numere consecutive a, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$ se observă că:

$$a(a + 1)\,(a + 2)\,(a + 3) = (a^2 + 3a + 1)^2 - 1 \quad (1)$$

nu poate fi pătrat perfect, potrivit raționamentului precedent, și nici cub perfect căci dacă, prin absurd, ar fi, după ce se notează $a = n - 1 \quad n \geqslant 2$, observăm că:

$$(n - 1)\,(n + 1)\,(n + 2) = n^3 + 2n^2 - n - 2$$

nu poate fi cub perfect deoarece este cuprins între n^3 și $(n + 1)^3$ deci n nu poate fi cub perfect.

Apoi observăm că n este (relativ) prim cu $n - 1$ și $n + 1$ deci ar trebui să aibă un factor comun cu $n + 2$, anume 2. Ca atare $n = 2k$ deci $n - 1$ și $n + 1$ sînt impare, deci prime între ele, factorii lor negăsindu-se în n. Numai $n - 1$ și $n + 2$ pot avea factorul comun 3. Ca atare $n + 1$, deoarece el nu are factori comuni cu ceilalți factori ai produsului, este cub deci rămîne că $n(n - 1)\,(n + 2) = n^3 + n^2 - 2n$ trebuie să fie cub, absurd căci $n^3 < n^3 + n(n - 2) < (n + 1)^3$ pentru $n > 2$, cazul $n = 2$ fiind banal.

X.0.R.2. Dacă a, b, c sînt numere impare, atunci:

$$*(a, b, c) = *\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{a+c}{2},\ \frac{b+c}{2}\right).$$

(Concurs elevi, 1976)

Soluție. Fie $d = *(a, b, c)$ și $D = *\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right)$. Ca atare: $a = md$, $b = nd$, $c = kd$, m, n, k fiind numere impare. În felul acesta:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{m+n}{2}\,d;\quad \frac{a+c}{2} = \frac{m+k}{2}\,d;\quad \frac{b+c}{2} = \frac{n+k}{2}\,d$$

de unde rezultă că d este divizor al numerelor $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{b+c}{2}$ și deci și al lui D.

Fie acum:

$$\frac{a+b}{2} = m_1 D,\quad \frac{a+c}{2} = n_1 D,\quad \frac{b+c}{2} = k_1 D.$$

Deducem de aici $a = (m_1 + n_1 - k_1)D$ deci $D \mid a$ și, analog, $D \mid b$, $D \mid c$ deci $D \mid d$ adică, în fond, $D = d$, c.c.t.d.

X.0.R.3. Dovediți că oricare două numere din șirul:

$$2^{2^0} + 1,\ 2^{2^1} + 1,\ 2^{2^2} + 1, \ldots, 2^{2^n} + 1, \ldots$$

sînt (relativ) prime între ele ($n \in N^*$).

Soluție. Se observă că, notînd $x_n = 2^{2^n} + 1$, obținem:

$$x_n - 2 = x_{n-1}x_{n-2} \ldots x_1x_0.$$

În felul acesta, numărul $x_n - 2$ se divide prin toate numerele $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Urmează de aici că dacă $2^{2^n} + 1$ și $2^{2^k} + 1$, cu $k < n$, ar avea un divizor comun, atunci el ar divide și pe 2, doarece $2^{2^n} - 1$ se divide cu $2^{2^k} + 1$ și $2^{2^n} + 1 = 2^{2^n} - 1 + 2$, absurd căci numerele $2^{2^k} + 1$ și $2^{2^n} + 1$ sînt impare. Afirmația este astfel dovedită.

X.0.R.4. Suma unor numere naturale consecutive este 5757. Să se găsească aceste numere.

Soluție. Fie:

$$a,\ a + 1, \ldots, a + k - 1$$

numerele respective și:

$$S = a + (a + 1) + \ldots + (a + k - 1) \tag{1}$$

suma lor. În suma respectivă există k termeni de adunat. Însă și:

$$S = (a + k - 1) + (a + k - 2) + \ldots + a \tag{2}$$

și, adunînd relațiile (1) și (2) membru cu membru și termen cu termen, găsim:

$$2S = (2a + k - 1)\,k \tag{3}$$

de unde:

$$S = \frac{(2a + k - 1)\,k}{2}. \tag{3'}$$

Dar $S = 5757$ deci trebuie determinate numerele naturale a și k astfel încît:

$$\frac{(2a + k - 1)\, k}{2} = 5757$$

și, de aici, evident, și numerele căutate. Cum:

$$5757 = 57 \cdot 101 = 101 \cdot 3 \cdot 19 = 303 \cdot 19 = 1919 \cdot 3 = 1 \cdot 5757$$

rezultă că au loc situațiile, deoarece, oricum, $2a + k - 1 > k$:

1°) $\begin{cases} 2a + k - 1 = 2 \cdot 5757 \\ k = 1 \end{cases}$ de unde $\begin{cases} k = 1 \\ a = 5757; \end{cases}$

2°) $\begin{cases} 2a + k - 1 = 5757 \\ k = 2 \end{cases}$ de unde $\begin{cases} k = 2 \\ a = 2878; \end{cases}$

3°) $\begin{cases} 2a + k - 1 = 2 \cdot 1919 \\ k = 3 \end{cases}$ de unde $\begin{cases} k = 3 \\ a = 1918; \end{cases}$

4°) $\begin{cases} 2a + k - 1 = 1919 \\ k = 6 \end{cases}$ de unde $\begin{cases} k = 6 \\ a = 957; \end{cases}$

5°) $\begin{cases} 2a + k - 1 = 606 \\ k = 19 \end{cases}$ de unde $\begin{cases} k = 19 \\ a = 294; \end{cases}$

6°) $\begin{cases} 2a + k - 1 = 303 \\ k = 38 \end{cases}$ de unde $\begin{cases} k = 38 \\ a = 133; \end{cases}$

7°) $\begin{cases} 2a + k - 1 = 202 \\ k = 57 \end{cases}$ de unde $\begin{cases} k = 56 \\ a = 73 \end{cases}$

X.0.R.5. Dovediți că orice întreg k poate fi reprezentat într-o infinitate de moduri sub forma:

$$k = \pm 1^2 \pm 2^2 + \ldots \pm m^2$$

unde $m \in N$ și alegerea semnelor $+$ și $-$ este convenabilă.

Soluție. Fie $k \geqslant 0$, fixat. Este clar că dacă există o reprezentare pentru k atunci există o reprezentare și pentru $-k \leqslant 0$. Ca atare putem presupune că avem $k \geqslant 0$.

Vom arăta prin inducție că orice întreg $k \geqslant 0$ admite cel puțin o reprezentare de forma:

$$k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm m^2 \qquad (1)$$

în care m este un întreg pozitiv iar semnele $+$ și $-$ sînt alese convenabil. Afirmația este banal verificată pentru numerele 0, 1, 2, 3, 4 deoarece:

$$0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2;$$

$$1 = 1^2;$$

$$2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2;$$

$$3 = -1^2 + 2^2;$$

$$4 = -1^2 - 2^2 + 3^2.$$

Presupunem că afirmația este verificată pentru un k oarecare și să o demonstrăm și pentru $k + 4$. Deoarece există m și o alegere a semnelor $+$ și $-$ pentru care:

$$k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm m^2$$

și:

$$4 = (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$$

adunînd, găsim:

$$k + 4 = \pm 1^2 \pm \ldots \pm m^2 \pm (m+1)^2 \pm (m+2)^2 \pm \pm (m+3)^2 \pm (m+4)^2$$

deci rezultă, potrivit principiului inducției matematice, că afirmația este valabilă pentru orice $k \geqslant 0$

Să observăm acum că din identitatea:

$$0 = (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 - - (m+5)^2 + (m+6)^2 + (m+7)^2 - (m+8)^2$$

și din reprezentarea lui k sub forma (1) putem obține alta înlocuind numărul m prin $m + 8$, apoi alta înlocuind $m + 8$ cu $m + 16$ etc. Obținem astfel o infinitate de reprezentări ale lui k de forma (1).

X.O.R.6. Dați exemplu de o funcție $f: N \to N$, surjectivă dar nu injectivă.

Soluție. Dăm un astfel de exemplu:

$$f(n) = a_h \text{ dacă } n = p_1^{a_1} \dots p_h^{a_h},\ a_h \neq 0.$$

Este clar că f este surjectivă deoarece pentru fiecare $h \in N$, există $n_{p,h} = p^h$ astfel ca $f(n_{p,h}) = h$ unde p este un număr prim oarecare și nu este injectivă deoarece, de exemplu $f(4) = f(9) = 2$. Un alt exemplu este funcția f_1 dată de:

$$f_1(x) = \left[\frac{x}{2}\right]_* + 1.$$

X.O.R.7. Fie expresia:

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i(1 - a_{i+1})$$

unde $\frac{1}{2} a_i \leqslant 1$, $a_{n+1} = a_1$. Să se determine maximul expresiei date.

(Baraj, 1974)

Soluție. Fie $a_i = \frac{1}{2} + \lambda_i$. În acest caz:

$$a_i(1 - a_{i+1}) = \left(\frac{1}{2} + \lambda_i\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda_{i+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_{i+1}) - \lambda_i\lambda_{i+1}.$$

Sumînd după i, găsim:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(1 - a_{i+1}) = \frac{n}{4} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\lambda_{i+1}.$$

Maximul are loc pentru minimul expresiei $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\lambda_{i+1}$ adică atunci cînd $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$ deci cînd:

$$a_1 = \dots = a_{n+1} = \frac{1}{2}.$$

X.0.R.8. Să se determine x pentru care x, $2x + 1$, $5x + 2$ sînt numere prime.

Soluție. Dacă $x = 6k$, $k \in N$, atunci $x = \mathfrak{M}3$ deci x nu este număr prim. Dacă $x = 6k + 1$ atunci $2x + 1 = 12k + 3 \vdots 3$. Dacă $x = 6k + 2$ atunci $5x + 2 = 30k + 12 \vdots 3$. Dacă $x = 6k + 3$, x nu este prim. Dacă $x = 6k + 4$, $x \vdots 2$.

Dacă $x = 6k + 5$, atunci $5x + 2 = 30k + 27 \vdots 3$. Rezultă dar că $x < 6$. Dacă $x = 5$ obținem numerele 5, 11, 27 dar 27 nu este prim. Cazul $x = 4$ nu convine. Cînd $x = 3$ obținem 3, 7, 17 care sînt toate numere prime. Cînd $x = 2$ obținem numerele 2, 5, 12 dar 12 nu este număr prim.

X.0.R.9. Să se determine $\overline{abcd}$ știind că:

$$\overline{abcd} - \overline{abc} - \overline{ab} - a = 1753.$$

Soluție. Potrivit notației curente, $\overline{abcd}$ arată că este vorba de numărul de patru cifre care are pe locul unităților pe d, pe cel al zecilor pe c, pe locul sutelor pe b iar pe locul miilor pe a. A se face deci distincție între $\overline{abcd}$ și $abcd$ (care reprezintă produsul numerelor a, b, c, d).

Relația dată se mai scrie:

$$1\,000a + 100b + 10c + d - 100a - 10b - c - 10a - b - a = 1753;$$

$$889a + 89b + 9c + d = 1753.$$

De aici $a = 1$ deci:

$$89b + 9c + d = 864$$

de unde:

$$b = \frac{864 - 9c - d}{89} = 9 + \frac{63 - 9c - d}{89}.$$

Cum 89 este număr mai mare decît $63 - 9c - d$ (acest lucru se obține dînd lui c și d toate valorile posibile), pentru ca ultima egalitate să fie posibilă trebuie

ca $63 - 9c - d = 0$ deci $b = 9$ deci $c = 7$ și $d = 0$ astfel că $\overline{abcd} = 1970$ sau $c = 6$, $d = 9$ deci, în acest caz $\overline{abcd} = 1969$.

X.O.R.10. Să se arate că numerele de forma:

$$\sqrt{13n \pm 2},\ \sqrt{13n \pm 5},\ \sqrt{13n \pm 6}$$

nu pot fi numere întregi pentru nici o valoare $n \in N$.

(C. Ionescu — Țiu, Rev. „5/4", I. 111)

Soluție. Rămîne să arătăm că orice pătrat perfect nu poate fi de una din formele $13n + 2$, $13n - 2$, $13n + 5$, $13n - 5$, $13n + 6$, $13n - 6$, $n \in N$.

Însă:

$(13n)^2 = 13k_1$; $(13n + 1)^2 = 13k_2 + 1$; $(13n + 2)^2 = 13k_3 + 4$; $(13n + 3)^2 = 13k_4 + 9$; $(13n + 4)^2 = 13k_5 + 3$; $(13n + 5)^2 = 13k_6 + 12$; $(13n + 6)^2 = 13k_7 + 10$; $(13n + 7)^2 = 13k_8 + 10$; $(13n + 8)^2 = 13k_9 + 12$; $(13n + 9)^2 = 13k_{10} + 3$; $(13n + 10)^2 = 13k_{11} + 9$; $(13n + 11)^2 = 13k_{12} + 4$; $(13n + 12)^2 = 13k_{13} + 1$; $k_1, k_2, \ldots, k_{13} \in N$,

ceea ce dovedește afirmația enunțului.

X.O.R.11. Să se arate că:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$$

dacă $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$.

Soluție. Un divizor d al lui n este de forma:

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k} \text{ cu } 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i,$$

$i = 1, \ldots, k$.

Divizorii distincți ai lui n sînt termenii produsului:

$$P = (1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}) \ldots \ldots (1 + p_k + p_k^2 + \ldots + p_k^{\alpha_k})$$

obținuți după desfacerea parantezelor, fără a face vreo sumă și numărul termenilor de acest fel din produsul P este tocmai:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$$

ceea ce dovedește afirmația.

X.0.R.12. Să se arate că suma tuturor divizorilor lui n este:

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

unde $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$.

Soluție. Un divizor d al lui n este de forma:

$$d = p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$$

unde $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ cu $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Deci:

$$\sigma(n) = \sum p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$$

unde $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ cu $i = 1, 2, \ldots, k$ și suma se extinde la toate posibilitățile de a alege sistemele diferite $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ cu proprietatea de mai sus. Dar această sumă coincide cu:

$$P = (1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1})\,(1 + p_2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}) \ldots$$
$$\ldots (1 + p_k + \ldots + p_k^{\alpha_k}) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

X.0.R.13. Să se arate că dacă $_*(m, n) = 1$ atunci:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\,\varphi(n).$$

Soluție. Considerăm mulțimea valorilor numerice ale expresiei $mx + y$, unde $x = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ și $y = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$. Există în total mn numere.

Toate acestea sînt mai mici decît mn, căci din $x \leqslant n - 1$ și $y \leqslant m - 1$ rezultă $mx + y \leqslant m(n - 1) + m - 1 = mn - 1$.

Dintre acestea sînt prime cu mn acelea care sînt prime și cu m și cu n și reciproc, adică $_*(mx + y, mn) = 1$ dacă și numai dacă $_*(mx + y, m) = 1$ și $_*(mx + y, n) = 1$.

În adevăr, dacă $_*(mx + y, mn) = 1$ este necesar ca $_*(mx + y, m) = 1$ și $_*(mx + y, n) = 1$ căci dacă,

de exemplu, $_*(mx + y, m) = k \neq 1$ atunci din $k \mid mx + y$ și $k \mid m$ ar rezulta $k \mid mx + y$ și $k \mid mn$ și atunci $_*(mx + y, mn) \neq 1$. Reciproc, dacă $_*(mx + y, m) = 1$ și $_*(mx + y, n) = 1$ atunci $_*(mx + y, mn) = 1$ căci din $_*(mx + y, mn) \neq 1$ ar rezulta că există un număr prim p, așa încît $p \mid mx + y$ și $p \mid mn$ iar din $p \mid m \cdot n$ ar decurge sau $p \mid m$ sau $p \mid n$ și atunci sau $_*(mx + y, m) \neq 1$ sau $_*(mx + y, n) \neq 1$, ceea ce ar contrazice ipoteza.

Numerele $mx + y$ sînt prime cu m dacă și numai dacă numerele y sînt prime cu m. În adevăr, dacă $_*(y, m) = k > 1$ atunci $k \mid mx + y$ și $k \mid m$ și deci $_*(mx + y, m) \geqslant k \neq 1$. Reciproc, dacă $_*(y, m) = 1$, întrucît $_*(mx + y, m) = _*(y, m)$ rezultă că $_*(mx + y, m) = 1$.

Conchidem așadar că numărul numerelor din valorile numerice ale expresiei $mx + y$ prime cu m este egal cu numărul numerelor din șirul $0, 1, 2, \ldots, m - 1$ prime cu m, adică cu $\varphi(m)$.

Fie acum y_1 un asemenea număr, $_*(y_1, m) = 1$, și să considerăm șirul:

$$y_1, m + y_1, 2m + y_1, \ldots, (n - 1)\, m + y_1.$$

Termenii acestui șir sînt numere prime cu m și împărțiți la n dau resturi diferite între ele. Fie:

$$hm + y_1 = nq_h + r_h, \text{ cu } 0 \leqslant r_h < n \text{ și } 0 \leqslant h < n;$$

$$km + y_1 = nq_k + r_k, \text{ cu } 0 \leqslant r_k < n \text{ și } 0 \leqslant k < n.$$

Dacă $h \neq k$, nu este posibil ca $r_h = r_k$, căci atunci:

$$hm - nq_h = k\, m - nq_k,$$

deci:

$$(k - h)\, m = n(q_k - q_h)$$

și cum $_*(m, n) = 1$, ar rezulta $n \mid (k - h)$ ceea ce nu este posibil deoarece $0 \leqslant h < n$ și $0 \leqslant k < n$ și deci $|k - h| < n$.

Numerele $hm + y_1 = nq_h + r_h$ sînt prime cu n dacă și numai dacă numerele r_h sînt prime cu n, dar șirul

resturilor este 0, 1, 2, ..., $n-1$, luat eventual în altă ordine, deci există $\varphi(n)$ numere prime cu n. Cum există $\varphi(m)$ asemenea valori pentru y, avem în total $\varphi(m)\ \varphi(n)$ numere prime cu mn și deci dacă $*(m, n) = 1$, atunci:

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n).$$

X.O.R.14. Să se construiască o funcție $f: N \to N$ care ia fiecare valoare de o infinitate de ori.

Soluție. Funcția f definită în X.O.R.6 este un exemplu de o astfel de funcție.

X.O.R.15. Pentru ce valori $n \in N$, numărul $n^2 + n + 1$ este pătrat perfect?

Soluție. Pentru orice $n \in N$:

$$n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$$

de unde deducem că $n^2 + n + 1$ nu poate fi pătrat perfect pentru nici o valoare $n \in N$ (reamintim că am presupus în acest capitol pe N fără 0).

X.O.R.16. Să se arate că:

$$\sqrt{26 + 6\sqrt{13 - 4\sqrt{8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}}} +$$

$$+ \sqrt{26 - 6\sqrt{13 + 4\sqrt{8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}}} \in Q.$$

Soluție. Succesiv:

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1,$$

$$\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1,$$

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{8 + 2(\sqrt{5} - 1)} =$$

$$= \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1$$

etc. Obținem în final:

$$\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}+$$

$$+\sqrt{16-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}}}}=6\in Q.$$

X.O.R.17. Să se arate că dacă a, b, c, d sînt numere întregi pozitive impare și distincte, atunci:

$$abc+abd+acd+bcd+34\leqslant 2abcd.$$

Soluție. Împărțind cu $abcd$, inegalitatea se scrie:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{34}{abcd}\leqslant 2.$$

Primul membru este maxim cînd a, b, c, d sînt minime, adică atunci cînd $a=1$, $b=3$, $c=5$, $d=7$ (eventual o permutare arbitrară). Calculînd, găsim că primul membru are cea mai mare valoare egală cu 2.

X.O.R.18. a°). Să se afle numărul n întreg astfel că valoarea fracției $1971/n$ cu o aproximație de o sutime prin lipsă este 1,73.

b°). Să se afle numărul n întreg astfel că valoarea fracției $1971/n$ cu aproximație de o sutime prin adaos este 1,74.

(Concurs elevi, 1974)

Soluție. Deci $\frac{1971}{n}=1{,}73$ cu aproximație prin lipsă și $\frac{1971}{n}=1{,}74$ cu aproximație prin adaos (de o sutime în fiecare caz). Însă și:

$$197100:173=1139+\frac{53}{173};$$

$$197100:174=1132+\frac{132}{174}.$$

În cazul a°), n poate fi 1139, 1138, ..., 1133 adică 8 valori, iar în cazul b°), n poate fi 1138, 1137, 1136, ..., ..., 1132 adică tot 8 valori.

X.0.R.19. Să se găsească un întreg pozitiv x astfel încît $2x + 1$ să fie pătrat perfect iar între numerele $2x + 2$, $2x + 3$, ..., $3x + 2$ să nu existe pătrate perfecte.

(R. Gologan, G.M.B, 11512)

Soluție. Deoarece $2x + 1$ este pătrat perfect, există $n \in N$ astfel încît:

$$2x + 1 = n^2, \; n \in N.$$

Faptul că printre numerele $2x + 2, 2x + 3, \ldots, 3x + 2$ nu există pătrate perfecte se traduce prin:

$$3x + 2 < (n + 1)^2$$

Dar $x = \dfrac{n^2 - 1}{2}$ deci inegalitatea anterioară se scrie:

$$\frac{3}{2}(n^2 - 1) + 2 < (n + 1)^2$$

sau, altfel scris:

$$n^2 - 4n - 1 < 0$$

de unde $n < 5$. Cazul $n = 4$ nu convine căci x nu este întreg. Dacă $n = 3$, $x = 4$ și, în adevăr, între $2x + 2, \ldots,$ ..., $3x + 2$ nu există pătrate perfecte. Cazurile $n = 2$ și $n = 1$ nu convin.

X.0.R.20. Să se arate că numărul $N = \overline{abcabc}$ se divide cu 7, 11 și 13.

(Gh. Căiniceanu, G.M.B, 4955)

Soluție. Este clar că:

$$N = \overline{abcabc} = c + 10b + 100a + 1000c + 10000b + 100000a = 1001c + 10b \cdot 1001 + 100a \cdot 1001 = 1001(c + 10b + 100a) = 1001\overline{abc}$$

și cum $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ rezultă afirmația.

X.0.R.21. Dovediți că nu există numere naturale $n \neq 1$ astfel încît dacă a și b sînt două numere naturale prime între ele, $\log_a n$ și $\log_b n$ să fie amîndouă numere raționale.

Soluție. Presupunem, prin absurd, că există $n \in N$ cu proprietatea cerută. Fie $p, r \in Z$, $q, s \in N$, astfel încît:

$$\log_a n = \frac{p}{q}, \quad \log_b n = \frac{r}{s}.$$

Obținem:

$$n = a^{\frac{p}{q}}, \quad n = b^{\frac{r}{s}}$$

deci:

$$a^{ps} = b^{qr}.$$

Prin ipoteză $a \neq 1$, $b \neq 1$ (condiția de existență a logaritmilor). Dacă ps și qr au semne diferite, egalitatea este evident imposibilă. Dacă ps și qr sînt pozitive, egalitatea este de asemenea imposibilă, a și b avînd factori primi diferiți. Dacă ps și qr sînt negative, imposibilitatea se demonstrează analog, scriind $a^{-ps} = b^{-rq}$.

X.0.R.22. Fie suma:

$$S_n = 2 + 10 + 24 + 44 + \ldots + (3n^2 - n).$$

a°). Să se determine S_n.

b°). Să se demonstreze prin metoda inducției matematice complete egalitatea obținută la punctul a°).

(Concurs elevi, 1975)

Soluție. Succesiv:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - k) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1).$$

Pentru $n = 1$, $S_1 = 2$ și formula este adevărată.

Pentru $n = 2$, $S_2 = 12$ și formula este și în acest caz adevărată.

Presupunem pentru un k oarecare:

$$S_k = k^2(k+1).$$

În acest caz:

$$S_k + 3(k+1)^2 - (k+1) = k^2(k+1) + 3(k+1)^2 - (k+1) = (k+1)(k^2+3k+3-1) =$$

$$= (k+1)(k+1)(k+2) = (k+1)^2(k+2) = S_{k+1},$$

ceea ce dovedește că formula este adevărată pentru orice $n \in N$, în virtutea principiului inducției matematice complete.

X.0.R.23. Dovediți că:

$$E = n^2m + nm^2 + n^2 + m^2 + 2mn + n + m \vdots 2$$

oricare ar fi $m, n \in N$.

Soluție. Expresia E mai poate fi scrisă:

$$E = n^2m + nm^2 + n^2 + m^2 + 2mn + n + m =$$

$$= mn(m+n) + (m+n)^2 + (m+n) =$$

$$(m+n)(nm+m+n+1) = (m+n)(n+1)(m+1)$$

Dacă m și n au aceeași paritate atunci $m+n \vdots 2$. În caz contrar unul din numerele m și n este impar deci mărit cu o unitate se obține un număr par ceea ce dovedește afirmația.

X.0.R.24. Fie A o mulțime finită de sisteme $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de numere naturale ($\alpha_i \in N$).

Să se arate că există numerele naturale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ astfel încît pentru orice $\alpha, \beta \in A$ cu $\alpha \neq \beta$ să aibă loc:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\lambda_i \neq \sum_{i=1}^{n} \beta_i\lambda_i.$$

(Baraj, 1974)

Soluție. Dovedim prin inducție după n.

Pentru $n = 1$ propoziția se verifică ($\alpha \neq \beta$).

Presupunem afirmația adevărată pentru un n oarecare. Pentru a arăta că:

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n+1} (\alpha_i - \beta_i)\,\lambda_i \neq 0 \text{ unde } \alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta$$

îl alegem pe $\lambda_{n+1} > \max \left| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\,\lambda_i \right|$ corespunzător tuturor perechilor de sisteme $\alpha, \beta \in A$. În felul acesta:

$$|(\alpha_{n+1} - \beta_{n+1})\,\lambda_{n+1}| > \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\,\lambda_i$$

oricare ar fi sistemele $\alpha, \beta \in A$. Deci inegalitatea (*) se verifică.

TESTE

X.0.T.1. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1}$ numere întregi iar $b_1, b_2, \ldots, b_{2k+1}$ o permutare arbitrară a lor.

Produsul $\prod_{i=1}^{2k+1} (a_i - b_i)$ este:

a°). par;
b°). impar.

X.0.T.2. Fie $a_i, b_i \in Z$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Produsul $\prod_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2)$

a°). se poate scrie sub forma $A^2 + B^2$ cu $A, B \in Z$;
b°). nu se poate scrie sub această formă.

X.0.T.3. Se dă șirul $\{y_n\}_{n \in N}$ de numere naturale definit prin relația de recurență:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$$

cu $y_1 = 5$, $y_2 = 13$.

Numărul y_{1977} este:

a°). compus;
b°). prim.

X.0.T.4. În ce bază ar putea fi scris numărul:

$$M = \overline{13(12)(15)} \ ?$$

a°). în baza 6;
b°). în baza 17;
c°). în nici o bază.

X.0.T.5. Fie $n \in N - \{1, 2, 3\}$, arbitrar dar fixat. Este posibil să existe $a, b \in N$ astfel încît:

$$*(a, b) = 2^{n-1} - 1;$$
$$*[a, b] = 2^{n-1} + 1?$$

a°). Da;
b°). Nu.

X.0.T.6. Fie numărul:

$$\frac{(1 + \sqrt{3})^{2n} + (1 - \sqrt{3})^{2n}}{2^{n+1}}.$$

El este:
a°). natural;
b°). rațional dar nu natural.

X.0.T.7. Numărul 3^7 se termină cu cifra:
a°). 9; b°). 7; c°). 3.

RĂSPUNSURI

X.0.T.1. a°). Se dovedește prin inducție, de pildă.

X.0.T.2. a°). Se poate dovedi tot prin inducție.

X.0.T.3. a°). Se află expresia lui y_n.

X.0.T.4. b°).

X.0.T.5. b°).

X.0.T.6. a°). Prin inducție, de pildă, sau folosind dezvoltarea binomului după *Newton*.

X.0.T.7. b°).

PROBLEME PROPUSE

X.O.P.1. Să se arate că dacă p și $8p^2 + 1$ sînt numere prime atunci $8p^2 - 1$ este prim.

X.O.P.2. Să se calculeze partea întreagă a numărului $1/0{,}04(3)$.

X.O.P.3. Fie $A, B \in N$ astfel încît $A^2 - B = C^2$, $C \in N$, $\sqrt{B} \notin N$.
Dovediți că:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} + \sqrt{\frac{A - C}{2}}.$$

X.O.P.4. Să se demonstreze că pentru un n oarecare ($n > 3$), produsul Q_n al tuturor numerelor prime, mai mici decît n, este mai mare decît n.

X.O.P.5. Să se afle două numere știind că suma lor este egală cu 60 iar c.m.m.d.c. al lor este 5.

X.O.P.6. Să se rezolve sistemul:

$$201_x + 108_y - 35_{xy} = 0$$
$$402_x + 203_y - 51_{xy} = 0$$

unde x, y și xy sînt baze de numerație.

(V. Chiriac, G.M.B, 11133)

X.O.P.7. Să se afle cifra unităților numerelor:

$$a = 23^{23} - 13^{11} \text{ și } b = 29^{29} - 17^{18}.$$

X.O.P.8. Să se afle mulțimea numerelor întregi n care au următoarea proprietate: mulțimea $\{n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5\}$ poate fi despărțită în două submulțimi disjuncte astfel încît produsul tuturor elementelor uneia dintre ele să fie egal cu produsul elementelor celeilalte submulțimi.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

X.O.P.9. Să se găsească toate numerele întregi pozitive, x, astfel încît produsul cifrelor fiecărui număr x (scris în baza zece) să fie egal cu $x^2 - 10x - 22$.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

X.O.P.10. Dacă $n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \dots p_{i_k}^{\alpha_k}$, atunci:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_{i_1}}\right)\left(1 - \frac{1}{p_{i_2}}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_{i_k}}\right)$$

cu $\alpha_i \neq 0$, $(\forall)\ i \in \{1, \dots, k\}$.

X.O.P.11. Fie $m \in N$, fixat. Dați exemplu de o funcție $f: N \to N$ care ia fiecare valoare exact de m ori.

SOLUȚII

X.O.P.1. Fie $p > 3$. Deoarece p este prim, el este de una din formele $3k + 1$, $3k + 2$. Dacă $p = 3k + 1$ atunci $8p^2 + 1 = 8(9k^2 + 6k + 1) + 1 = 3(24k^2 + 16k + 3)$ nu este prim. Dacă $p = 3k + 2$, $8p^2 + 1 = 3(24k^2 + 32k + 11)$ nu este, de asemenea, prim, contrar ipotezei. Rămîne deci $p \leqslant 3$. Dacă $p = 3$ atunci $8p^2 + 1 = 73$ este număr prim și, de asemenea, $8p^2 - 1 = 71$ este număr prim. Dacă $p = 2$ atunci $8p^2 + 1 = 33$ nu este număr prim.

X.O.P.2. Evident:

$$0{,}04(3) = \frac{43 - 4}{900} = \frac{39}{900}$$

deci:

$$\frac{1}{0{,}04(3)} = \frac{900}{39}$$

deci partea întreagă a numărului este 23.

X.O.P.3. Să admitem că există $x, y \in Q$ astfel încît:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Ridicînd la pătrat ambii membri și identificînd părțile raționale, respectiv iraționale, obținem:

$$x + y = A$$

$$xy = \frac{B}{4}$$

de unde obținem că x și y sînt dați de ecuația:

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0$$

de unde:

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}; \quad y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Cu convenția $A^2 - B = C^2$ obținem:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} + \sqrt{\frac{A - C}{2}}.$$

Se vede că x și y sînt numere raționale. În felul acesta, de exemplu:

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

X.O.P.4. Fie p_k cel mai mare număr prim, inferior lui n, adică $p_k \leqslant n < p_{k+1}$. Ceea ce trebuie să demonstrăm revine la $p_1 p_2 \ldots p_k > n$. Dar, din demonstrația teoremei lui *Euclid* (vezi X.O.17) după care există o infinitate de numere prime:

$$p_1 p_2 \cdots p_k > p_{k+1}$$

și cum $p_{k+1} > n$ rezultă, prin tranzitivitate, inegalitatea cerută.

X.O.P.5. Fie a și b cele două numere. Din enunț:

$$a + b = 60$$

$$a = 5a_1$$

$$b = 5b_1$$

cu $_*(a_1, b_1) = 1$. Ca atare:

$$a_1 + b_1 = 12$$

de unde soluțiile, pentru a_1 și b_1:

(1, 11), (5, 7) (soluțiile (2, 10), (3, 9), (4, 8), (6, 6) nu convin deoarece numerele nu sînt prime între ele). Ca atare, se obțin două soluții, $a = 5$, $b = 55$ și respectiv $a = 25$, $b = 35$.

X.O.P.6. Sistemul, trecînd în baza 10, devine:

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 + y^2 + 8 - 3xy - 5 = 0 \\ 4x^2 + 2 + 2y^2 + 3 - 5xy - 1 = 0 \end{cases}$$

sau, altfel scris:

$$2x^2 + y^2 - 3xy + 4 = 0$$

$$4x^2 + 2y^2 - 5xy + 4 = 0.$$

Înmulțind prima ecuație cu 2 și scăzînd din ecuația a doua, găsim $xy = 4$. Dar deoarece baza trebuie să fie mai mare decît oricare din cifrele pe care le folosește, cercetînd numerele din enunț obținem că $y \geqslant 9$, $x \geqslant 5$ deci $xy \geqslant 45$, lucru ce vine în contradicție cu egalitatea $xy = 4$. Ca atare, sistemul propus nu are soluții.

X.O.P.7. Evident:

$$23^{23} = (20 + 3)^{23} = \mathfrak{M}10 + 3^{23} = \mathfrak{M}10 + 3 \cdot 3^{22} =$$

$$= \mathfrak{M}10 + 3 \cdot 9^{11} = \mathfrak{M}10 + 3 \cdot (10 - 1)^{11} = \mathfrak{M}10 + 7$$

deci 23^{23} se termină în 7. Un raționament analog arată că 13^{11} se termină în 7 deci a se termină în $7 - 7 = 0$.

Deducem, în același mod, că și b se termină în 0.

X.O.P.8. Printre cele 6 numere ale mulțimii $M = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ există cel puțin un multiplu de 5. Dacă ar exista numai unul, partiția cerută nu se poate face deoarece unul din produse s-ar divide la 5 pe cînd celălalt nu. Deci trebuie să existe doi multipli de 5 printre elementele mulțimii M. Acest lucru este posibil numai pentru numerele n și $n+5$, care trebuie, avînd în vedere observația precedentă, să facă parte din mulțimi diferite. Însă:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) > (n+5),$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3) > (n+4)(n+5)$$

pentru $n = 5, 10, 15, \ldots$ și cu atît mai mult pentru alte combinații de două numere, cu $n+5$ la stînga. În fine:

$$n(n+3)(n+4) < (n+1)(n+2)(n+5)$$

ș.a.m.d.

În concluzie, pentru toate partițiile, produsele nu pot fi egale.

X.O.P.9. Fie un număr format din cel puțin două cifre:

$$A = 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + \ldots + 10^0 a_n$$

avînd cifrele $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$; să arătăm mai întîi că:

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant A.$$

Este clar că:

$$A - \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = a_1(10^{n-1} - \overline{a_2 a_3 \ldots a_n}) + 10^{n-2}a_2 + \ldots + a_n$$

și deoarece $10 > a_i$, rezultă $A - \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant 0$. Deci este necesar ca x să verifice inegalitatea $x \geqslant x^2 - 10x - 22$ sau, altfel scris, $x^2 - 11x - 22 \leqslant 0$. Deci:

$$\frac{11 - \sqrt{209}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{11 + \sqrt{209}}{2} \text{ și } x \in N.$$

Cum $14 < \sqrt{209} < 15$, rezultă $x < \frac{11+15}{2} = 13$ deci $x \leqslant 12$ și $x \in N$. Pe de altă parte produsul cifrelor lui x este un număr pozitiv sau nul deci $x^2 - 10x - 22 \geqslant 0$ adică $x \geqslant 12$. Rămîne, în fond, din cele două inegalități, că $x = 12$.

X.0.P.10. Întrucît pentru $_*(m, n) = 1$:

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

deducem:

$$\varphi(n) = \varphi(p_{i_1}^{\alpha_1} \dots p_{i_k}^{\alpha_k}) = \varphi(p_{i_1}^{\alpha_1}) \dots \varphi(p_{i_k}^{\alpha_k}).$$

Dar:

$$\varphi(p_{i_j}^{\alpha_j}) = p_{i_j}^{\alpha_j} - p_{i_j}^{\alpha_j - 1}$$

întrucît numai numerele de forma tp_{i_j}, cu $1 \leqslant t \leqslant p_{i_j}^{\alpha_j - 1}$ nu sînt prime cu $p_{i_j}^{\alpha_j}$ din cele $p_{i_j}^{\alpha_j}$ din segmentul $\overline{1,\ p_{i_j}^{\alpha_j}}$.

Ca atare:

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^{k} \varphi(p_{i_j}^{\alpha_j}) = \prod_{j=1}^{k} p_{i_j}^{\alpha_j}\left(1 - \frac{1}{p_{i_j}}\right) = n \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_{i_j}}\right).$$

X.0.P.11. Funcția $f: N \to N$ definită prin:

$$f(n) = \left[\frac{n-1}{m}\right]_* + 1$$

are proprietatea cerută.

X.1.0. Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi.

X.1.1. Fie ecuația:

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad \text{(X.1.1.0)}$$

căreia vrem să îi determinăm soluțiile în numere întregi.

Ecuația se mai poate scrie:

$$y^2 = z^2 - x^2$$

sau, altfel scris:

$$y^2 = (z - x)(z + x).$$

Putem satisface această ecuație punînd:

$$z - x = \frac{\alpha}{\beta} y \qquad \text{(X.1.1.1)}$$

$$z + x = \frac{\beta}{\alpha} y \qquad \text{(X.1.1.2)}$$

în care α și β sînt numere întregi nenule. Putem chiar presupune că α și β sînt prime între ele (nu au nici un divizor comun, diferit de 1), adică, altfel scris, $_*(\alpha, \beta) = 1$; în caz contrar simplificăm prin c.m.m.d.c. al lor.

Deoarece $z - x \in Z$, $z + x \in Z$ avem că $y : \beta$ și respectiv $y : \alpha$ deci $y = k\alpha\beta$ unde $k \in Z$, $k \neq 0$.

Adunînd ecuațiile (X.1.1.1) și (X.1.1.2) obținem:

$$z = \frac{k}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \qquad \text{(X.1.1.3)}$$

deci:

$$x = \frac{k}{2}(\beta^2 - \alpha^2) \qquad \text{(X.1.1.4)}$$

și:

$$y = k\alpha\beta \qquad \text{(X.1.1.5)}$$

Rezultă deci că ecuația (X.1.1.0) poate fi satisfăcută punînd x, y, z date de (X.1.1.3), (X.1.1.4) și (X.1.1.5). Cum însă α și β pot fi de paritate opusă, deci ca $\alpha^2 + \beta^2$ respectiv $\beta^2 - \alpha^2$ să fie numere impare rezultă, cu necesitate, $k = 2\rho$, $\rho \in Z$, $\rho \neq 0$ de unde, în final:

$$\begin{aligned} x &= \rho(\beta^2 - \alpha^2) \\ y &= 2\rho\alpha\beta \\ z &= \rho(\alpha^2 + \beta^2),\ \alpha, \beta, \rho \in Z - \{0\} \end{aligned} \qquad \text{(X.1.1.6)}$$

relații care exprimă toate soluțiile în numere întregi ale ecuației (X.1.1.0) la care le adăugăm și pe (0, 0, 0) (cînd sau $\rho = 0$ sau $\alpha = \beta = 0$), $(a, 0, a)$, $(-a, 0, a)$, $(a, 0, -a)$, $a \in Z - \{0\}$, pe care le-am exclus anterior cînd am impus restricții numerelor α, β, ρ.

Pentru $\rho = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ obținem egalitatea:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

întîlnită îa studiul triunghiului dreptunghic. Rezultă de aici că lungimile numere naturale ale laturilor unui triunghi dreptunghic sînt date de formulale de mai sus, avînd în vedere teorema lui *Pitagora*.

X.1.2. Ne propunem în continuare să găsim toate perechile de numere naturale pentru care suma numerelor ce le formează să fie egală cu produsul lor (pentru fiecare pereche în parte, dacă, evident, astfel de perechi există). Cu alte cuvinte, trebuie să rezolvăm în numere naturale ecuația:

$$a + b = ab. \qquad \text{(X.1.2.1)}$$

Se observă imediat că perechea (2, 2) verifică ecuația. Să demonstrăm că această pereche este singura soluție de tipul cerut.

Să exprimăm pe a în funcție de b:

$$a = \frac{b}{b-1}.$$

Dacă $b = 1$ atunci (X.1.2.1) devine:

$$1 + a = a$$

absurd. Rămîne că $b - 1 > 0$ și deci a este egal cu raportul a două numere naturale consecutive (b și $b - 1$). Dar pentru $b - 1 > 1$, a nu poate fi întreg după cum se poate imediat constata din șirul:

$$\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n}{n-1}, \ldots$$

care nu conține nici un număr întreg. Rămîne deci că $b - 1 = 1$ deci $b = 2$ și, din (X.1.2.1), $a = 2$.

Să complicăm puțin lucrurile, anume să trecem la cazul a trei numere. Să vedem dacă este posibil să existe trei numere naturale astfel încît suma lor să fie egală cu produsul lor.

Să arătăm că și acest lucru este posibil.
Avem deci de rezolvat în numere naturale ecuația:

$$x + y + z = xyz. \qquad \text{(X.1.2.2)}$$

Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $x \leqslant y \leqslant z$, în caz contrar, avînd în vedere simetria fiecărui membru al ecuației, schimbăm necunoscutele între ele. Relația (X.1.2.2), prin împărțirea ambilor membri ai egalității cu xyz, devine:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = 1. \qquad \text{(X.1.2.2.1)}$$

Cu relația de ordine între x, y, z obținem:

$$\frac{1}{xy} \leqslant \frac{1}{x^2}; \frac{1}{xz} \leqslant \frac{1}{x^2}; \frac{1}{yz} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

deci, adunînd:

$$1 = \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} \leqslant \frac{3}{x^2}$$

adică:

$$x^2 \leqslant 3$$

de unde, cum x este natural:

$$x = 1.$$

Astfel, relația (X.1.2.2.1) devine:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} = 1.$$

Dar și:

$$\frac{1}{z} \leqslant \frac{1}{y}; \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{y}; \frac{1}{yz} \leqslant \frac{1}{y^2}$$

deci, adunînd:

$$1 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{yz} \leqslant \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}$$

de unde:

$$y^2 - 2y - 1 \leqslant 0$$

deci $0 < y \leqslant 1 + \sqrt{2} < 3$.

Pentru $y = 1$ relația (X.1.2.2) devine:

$$2 + z = z$$

absurd.

Pentru $y = 2$ obținem $z = 3$ astfel că obținem pentru ecuația (X.1.2.2) doar soluția $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ (de fapt obținem încă cinci soluții, permutînd în toate modurile posibile pe 1, 2, 3).

X.1.3. Fie ecuația:

$$\alpha\beta = \gamma\delta \qquad \text{(X.1.3.1)}$$

cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z$. Dacă punem aici $\alpha = ac$, $\beta = bd$, $\gamma = ab$, $\delta = cd$ obținem o soluție. Dar:

$$(\alpha + \beta)^2 + (\gamma - \delta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\gamma + \delta)^2 \qquad \text{(X.1.3.1.1)}$$

este o formă echivalentă a ecuației (X.1.3.1) deci ecuația:

$$x^2 + y^2 = z^2 + t^2 \qquad \text{(X.1.3.2)}$$

admite ca soluții numere întregi:

$$\begin{aligned} x &= ac + bd \\ y &= ab - cd \\ z &= ac - bd \\ t &= ab + cd. \end{aligned} \qquad \text{(X.1.3.3)}$$

X.1.4. Din identitatea:

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \qquad \text{(X.1.4.1)}$$

cu substituțiile:

$$y_1 \to y_1\sqrt{D};\ y_2 \to y_2\sqrt{D}$$

obținem:

$$(x_1^2 + Dy_1^2)(x_2^2 + Dy_2^2) - (x_1x_2 + Dy_1y_2)^2 = \\ = D(x_1y_2 - x_2y_1)^2. \qquad \text{(X.1.4.2)}$$

Conform relației (X.1.4.1), ecuația:

$$x^2 + y^2 = uv \qquad \text{(X.1.4.3)}$$

admite drept soluții:

$$x = x_1x_2 + y_1y_2,\ u = x_1^2 + y_1^2, \\ y = x_1y_2 - x_2y_1,\ v = x_2^2 + y_2^2. \qquad \text{(X.1.4.4)}$$

Ecuația (X.1.4.3) este însă echivalentă cu:

$$(2x)^2 + (2y)^2 + (u - v)^2 = (u + v)^2 \qquad \text{(X.1.4.3.1)}$$

și, ca atare, ecuația:

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \qquad \text{(X.1.4.5)}$$

admite soluțiile:

$$x = 2(x_1x_2 + y_1y_2), \\ y = 2(x_1y_2 - x_2y_1), \\ z = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2, \\ t = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2. \qquad \text{(X.1.4.6)}$$

Raționînd analog pentru ecuația:

$$x^2 + Dy^2 = uv \qquad \text{(X.1.4.7)}$$

obținem că ecuația:

$$x^2 + y^2 + Dz^2 = t^2 \qquad \text{(X.1.4.8)}$$

admite drept soluții:

$$x = x_1^2 - x_2^2 + D(y_1^2 - y_2^2), \\ y = 2(x_1x_2 + Dy_1y_2), \\ z = 2(x_1y_2 - x_2y_1), \\ t = x_1^2 + x_2^2 + D(y_1^2 + y_2^2). \qquad \text{(X.1.4.9)}$$

X.1.5. Există însă ecuații — știm acest lucru — care nu au soluții în numere întregi. Ecuația:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

nu are soluțiile nici măcar reale. Demonstrația pentru alte tipuri nu rezultă imediat.

Exemplificăm acest lucru printr-o ecuație tip *Fermat*:

$$x^4 + y^4 = z^4. \qquad \text{(X.1.5.1)}$$

Să arătăm că această ecuație nu admite soluții în numere întregi nenule.

Dacă demonstrăm că ecuația:

$$x^4 + y^4 = z^2 \qquad \text{(X.1.5.2)}$$

nu admite soluții în numere întregi atunci, implicit, nici ecuația (X.1.5.1) nu admite astfel de soluții.

Admitem, prin absurd, că ecuația (X.1.5.2) ar avea o astfel de soluție. Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $x, y, z > 0$ (deoarece pătratul oricărui număr negativ este un număr pozitiv) și $_*(x, y) = {}_*(y, z) = {}_*(z, x) = 1$. Din:

$$x^4 = (z - y^2)(z + y^2)$$

factorii fiind primi între ei, deducem:

$$z - y^2 = u^4;\ z + y^2 = v^4$$

unde $_*(u, v) = 1$ și $uv = x$. Rezultă de aici:

$$2y^2 = v^4 - u^4 = (v^2 + u^2)(v^2 - u^2),\ 2z = u^4 + v^4.$$

Asemănător ca mai sus, obținem:

$$u^2 + v^2 = 2s^2$$

$$v^2 - u^2 = 4t^2$$

cu $s, t > 0$, $_*(s, t) = 1$, $y = 2st$.

Din a doua ecuație deducem:

$$u + v = 2a^2$$

$$v - u = 2b^2$$

$$t = ab$$

cu $a, b > 0$, $*(a, b) = 1$ deci $u = a^2 - b^2$, $v = a^2 + b^2$. Introducînd aceste valori în $u^2 + v^2 = 2s^2$ găsim o nouă ecuație de tipul (X.1.5.2):

$$a^4 + b^4 = s^2$$

unde $a, b > 0$ și $z = a^8 + 6a^4b^4 + b^8 = s^4 + 4a^4b^4 > s^4 \geqslant s > 0$.

Noii ecuații îi putem aplica același procedeu și, repetînd, obținem un șir de ecuații de tipul (X.1.5.2.) ale căror numere z formează un șir infinit descrescător de numere întregi pozitive, lucru evident absurd. Rezultă, în definitiv, că ecuația (X.1.5.2) nu admite soluții în numere naturale și, implicit, ecuația (X.1.5.1) are aceeași proprietate.

Afirmația făcută de *Fermat* are un caracter general, anume că ecuația:

$$x^n + y^n = z^n, \; n > 2$$

nu admite soluții în numere naturale. Eforturile depuse în această direcție sînt remarcabile însă *„Marea teoremă a lui Fermat"* a rămas pînă astăzi nerezolvată. S-a demonstrat că pentru orice număr prim $2 < p \leqslant 4002$ nu există $(x, y, z) \in N^3$ care să verifice ecuația:

$$x^p + y^p = z^p$$

(ecuația lui *Fermat* se reduce simplu la ecuația anterioară, scriindu-l pe n ca produs de factori primi).

Noi discipline au luat însă naștere, datorită acestei probleme.

Nu intrăm în amănunte.

X.1.6. Dacă în (X.1.4.1) facem transformările:

$$x_1 \to x_1 \sqrt{a}, \; y_1 \to y_1 \sqrt{b}$$

$$x_2 \to x_2 \sqrt{a}, \; y_2 \to y_2 \sqrt{b}$$

obținem identitatea:

$$(ax_1^2 + by_1^2)(ax_2^2 + by_2^2) = \\ = (ax_1x_2 + by_1y_2)^2 + ab(x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Analog:

$$(ax_1^2 + by_1^2)\,(aby_2^2 + x_2^2) =$$
$$= a(x_1x_2 + by_1y_2)^2 + b(ax_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Ecuația:

$$ax^2 + by^2 = uv$$

ia și forma:

$$ax^2 + by^2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2$$

adică:

$$a(2x)^2 + b(2y)^2 = (u+v)^2 - (u-v)^2$$

de unde obținem pentru ecuația:

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = t^2$$

drept soluții:

$$x = ax_1^2 + by_1^2 - x_2^2 - aby_2^2,$$
$$y = 2(x_1x_2 + by_1y_2),$$
$$z = 2(ax_1y_2 - x_2y_1),$$
$$t = ax_1^2 + by_1^2 + x_2^2 + aby_2^2.$$

TESTE

X.1.T.1. Ecuația:

$$2v + 1 = vt$$

admite în numere naturale:

a°). o infinitate de soluții;

b°). soluția unică $t = 3$, $v = 1$;

c°). un număr finit, mai mare decît 1, de soluții.

X.1.T.2. Ecuația:

$$xy + yz + zx = xyz$$

admite în numere naturale:

a°). o singură soluție;

b°). două soluții;

c°). cel puțin trei soluții.

X.1.T.3. Ecuația:

$$x^y = y^x$$

are în numere naturale:

a°). un număr infinit de soluții;

b°). numai soluțiile (2, 4), (4, 2), (2, 2);

c°). un număr mai mare decît 3, finit, de soluții.

X.1.T.4. Fie $x, y, z > 0$. Ecuația:

$$x^2y + y^2z + z^2x - xyz = 0$$

a°). are soluții;

b°). nu are soluții.

RĂSPUNSURI

X.1.T.1. b°). Cu substituțiile $a = v + 1$, $b = i - 1$ ajungem la ecuația $a + b = ab$.

X.1.T.2. c°).

X.1.T.3. a°). Deoarece $x = y = n$, n oarecare, constituie soluție.

X.1.T.4. b°). Se aplică inegalitatea mediilor și se ajunge la o absurditate.

X.1.P.1*. Dovediți că ecuația:

$$x^2 + x - 2y^2 = 0$$

are o infinitate de soluții în numere naturale. Să se găsească aceste soluții.

X.1.P.2[1]**.** Demonstrați că ecuația:

$$x^x + y^y + z^z = t^t$$

nu admite soluții în numere naturale.

(Matematika v şkole, 1972)

X.1.P.3[2]**.** Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$x(x^2 + 1) = 2y^4.$$

(Baraj, 1971)

X.1.P.4[1]**.** Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$x^2 + y^2 = 2z^2.$$

X.1.P.5[2]**.** Să se rezolve în numere naturale ecuația:

$$1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^z.$$

X.1.P.6[3]**.** Să se studieze existența soluțiilor în numere naturale ale ecuației:

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz.$$

X.1.P.7[2]**.** Să se rezolve în numere naturale ecuația:

$$2^x = 3^y + 5.$$

X.1.P.8. Să se rezolve în numere naturale:

$$x! + y! = (x + y)!.$$

X.1.P.9[1]**.** Dacă p este număr prim, să se rezolve în numere naturale ecuația:

$$2^{4n+2} + 1 = 5p.$$

Presupunînd că p este număr prim, să se rezolve în numere naturale ecuațiile:

X.1.P.10[1]. $24p + 1 = k^2$.

X.1.P.11*. $(k-1)!\,(p-k)! + (-1)^{k+1} = p^m$, cu $p > 7$, $1 \leqslant k \leqslant p$.

X.1.P.12[1]. $2^{2^{4n+1}} = p - 27$.

X.1.P.13[1]. $p^5 - 1 = a^2(p-1)$.

Să se rezolve în numere naturale ecuațiile:

X.1.P.14[2]. $4^n(8k-1) = a^2 + b^2$. Cazul $n = 0$.

X.1.P.15[2]. $4^n(8k-1) = a^2 + b^2 + c^2$. Cazul $n = 0$.

X.1.P.16[1]. $a(10^n - 1) = 9k^2$, dacă $1 \leqslant a \leqslant 9$.

X.1.P.17. $x! + y! + z! = 100x + 10y + z$, cu $1 \leqslant x, y, z \leqslant 9$.

X.1.P.18[3]. $[n \lg n]_* = n - 1$.

X.1.P.19. $(n-3)! = n(n^2 - 1)$.

X.1.P.20. $24(n-5)! = (n+1)(n-1)$.

X.1.P.21. $1 + p = n^a$ dacă $2 \leqslant a \leqslant 10$ și p număr prim.

X.1.P.22. Să se rezolve în Z sistemul:

$$\begin{cases} 2t = n^2 \\ 2t - u = m^2 \\ 2t + u = k^2. \end{cases}$$

X.1.P.23[1]. Fie $n \in N$, arbitrar, fixat. Dacă ecuația:

$$x^2 + y^2 = n$$

are în numere naturale cel puțin două soluții, atunci n nu poate fi număr prim.

X.1.P.24. Fie $n \in N$, $n > 6$, arbitrar, fixat. Atunci ecuația:

$$x + y = n$$

are cel puțin o soluție cu $_*(x, y) = 1$.

X.1.P.25*. Dovediți că ecuația:

$$4p^2 + 1 = a^2 + b^2 + c^2$$

unde $p \geqslant 3$ este un număr prim fixat, are cel puțin o soluție în N.

X.1.P.26*. Dacă p este un număr prim fixat, ecuația:

$$kp = x^2 + y^2 + 1$$

are o infinitate de soluții.

X.1.P.27. Să se rezolve ecuația:

$$5(q_1 - 1) \ldots (q_k - 1) = 4\, q_1 \ldots q_k$$

știind că $q_1, \ldots, q_k$ sînt numere prime distincte.

X.1.P.28. Să se arate că ecuația:

$$x^3 + y^3 + z^3 = a$$

unde $a \in \{9k + 4;\ k \in Z\}$ nu admite soluții întregi.

(Gh. Szöllösy, G.M.B, 10473)

SOLUȚII

X.1.P.1*. Să observăm că $x = y = 1$ este o soluție a acestei ecuații și că $u = 3x + 4y + 1$, $v = 2x + 3y + 1$ verifică la rîndul său ecuația căci, în adevăr:

$$u^2 + u - 2v^2 = (3x + 4y + 1)(3x + 4y + 2) - 2(2x + 3y + 1)^2 = x^2 + x - 2y^2.$$

Să admitem că (x, y) este o soluție în numere naturale a ecuației:

$$x^2 + x - 2y^2 = 0 \tag{1}$$

iar $x > 1$ și, prin urmare, după cum imediat rezultă din (1), $y > 1$. Să arătăm că, în acest caz:

$$3x - 4y + 1 > 0,\ 3y - 2x - 1 > 0,\ 2x - 4y + 1 < 0. \tag{2}$$

Dacă $4y \geqslant 3x + 1$, am avea $16y^2 \geqslant 9x^2 + 6x + 1$; deoarece însă, potrivit relației (1), $16y^2 = 8x^2 + 8x$, am obține $2x \geqslant x^2 + 1$ adică, altfel scris, $(x - 1)^2 \leqslant 0$ deci $x = 1$, contrar ipotezei. Prima inegalitate este în acest fel stabilită.

Dacă $3y \leqslant 2x + 1$ atunci ar avea loc $9y^2 \leqslant 4x^2 + 4x + 1$ și cum, potrivit relației (1), $4x^2 + 4x = 8y^2$, rezultă $y^2 \leqslant 1$, absurd deoarece, prin ipoteză, $x > 1$ a implicat $y > 1$. Rezultă, în definitiv, a doua relație (2) și deoarece:

$$2x - 4y + 1 < 2x - 3y + 1 < 0$$

rezultă și a treia relație. Fie acum:

$$\begin{aligned} \xi &= 3x - 4y + 1 \\ \eta &= 3y - 2x - 1, \end{aligned} \tag{3}$$

x și y fiind soluții ale ecuației.

În baza celor demonstrate anterior, $\xi, \eta \in N$ și $\xi - x = 2x - 4y + 1 < 0$ deci $\xi < x$. Avînd în vedere relația (3), obținem că:

$$\begin{aligned} \xi^2 + \xi - 2\eta^2 &= (3x - 4y + 1)(3x - 4y + 2) - \\ &- 2(3y - 2x - 1)^2 = x^2 + x - 2y^2 \end{aligned}$$

și ținînd seama de (1), rezultă:

$$\xi^2 + \xi - 2\eta^2 = 0$$

ceea ce arată că dacă (x, y) satisface ecuația (1), atunci și (ξ, η) satisface ecuația (1).

Fie, în continuare:

$$g(x, y) = (3x - 4y + 1,\ 3y - 2x - 1) \qquad (4)$$

adică fiecărui punct (x, y) din sistemul rectangular xOy îi facem să-i corespundă un punct din același plan de coordonate $\xi = 3x - 4y + 1$, $\eta = 3y - 2x - 1$. Astfel, dacă (x, y) este o soluție în numere naturale a ecuației (1), cu $x > 1$, atunci $(\xi, \eta) = g(x, y)$ este, de asemenea, o soluție în numere naturale a ecuației (1), $\xi < x$. Dacă $\eta > 1$, procedînd analog, pornind de la soluția (ξ, η), obținem o nouă soluție în numere naturale $(\xi_1, \eta_1) = g(\xi, \eta) = g(g(x, y)) = g_2(x, y)$ în care $\xi_1 < \xi$. În mod analog, cu notația $g_{k+1}(x, y) = g(g_k(x, y))$, obținem un șir de soluții ale ecuației (1):

$$g(x, y),\ g_2(x, y),\ g_3(x, y), \ldots$$

în numere naturale din ce în ce mai mici. Deoarece șirul numerelor naturale mai mici decît un număr oarecare t (șirul este strict descrescător) nu poate fi infinit, atunci pentru un anumit număr natural n obținem $(u, v) = g(x, y)$ în care $u = 1$ deci $v = 1$ adică ajungem la soluția $(u, v) = (1, 1)$.

Astfel, dacă (x, y) este o soluție arbitrară în numere naturale a ecuației (1), unde $x > 1$, atunci există un număr natural ca $g_n(x, y) = (1, 1)$. Să luăm în continuare:

$$f(x, y) = (3x + 4y + 1,\ 2x + 3y + 1).$$

Obținem:

$$f(g(x, y)) = (3(3x - 4y + 1) + 4(3y - 2x - 1) + 1,$$
$$2(3x - 4y + 1) + 3(3y - 2x - 1) + 1) = (x, y)$$

de unde, prin inducție:

$$f_n(g_n(x, y)) = (x, y),\ n = 1, 2, \ldots$$

în care f_n este obținut analog ca g_n.

Rezultă că, în definitiv, potrivit observației anterioare:

$$(x, y) = f_n(1, 1).$$

Pe de altă parte, dacă luăm:

$$u = 3x + 4y + 1,\ v = 2x + 3y + 1 \qquad (6)$$

atunci, cum:

$$u^2 + u - 2v^2 = x^2 + x - 2y^2$$

rezultă că dacă (x, y) este soluție în numere naturale a ecuației (1), atunci $(u, v) = f(x, y)$ este, de asemenea, o soluție în numere naturale a ecuației (1), respectiv mai mari decît x și y în virtutea relației (6). Rezultă în definitiv că toate soluțiile x, y în numere naturale ale ecuației (1) și numai soluțiile de acest gen se găsesc în șirul infinit:

$$(1, 1),\ f(1, 1),\ f(f(1, 1)),\ f(f(f(1, 1))), \ldots$$

Dacă luăm $x_1 = y_1 = 1$, $(x_n, y_n) = f_{n+1}(1, 1)$ pentru $n = 2, 3, \ldots$, obținem:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n),\ (\forall)n = 1, 2, \ldots$$

deci, conform relației (6), au loc formulele:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n + 4y_n + 1 \\ y_{n+1} &= 2x_n + 3y_n + 1 \end{aligned} \qquad (7)$$

pentru $n = 1, 2, \ldots$ Așadar toate soluțiile în numere naturale ale ecuației (1) se găsesc în șirul infinit (x_n, y_n) pentru $n = 1, 2, \ldots$, în care $x_1 = y_1 = 1$.

Înmulțind prima relație (7) cu 2 iar a doua cu -3 și adunînd, obținem:

$$2x_{n+1} - 3y_{n+1} = -y_n - 1$$

de unde, cu o modificare de indici (cu $n \geqslant 2$):

$$2x_n = 3y_n - y_{n-1} - 1 \qquad (8)$$

astfel că din a doua relație (7):

$$y_{n+1} = 6y_n - y_{n-1},\ n \geqslant 2$$

sau, altfel scris:

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + y_n = 0,\ n \geqslant 1.$$

Dar $y_1 = 1$, $y_2 = 6$ astfel că:

$$y_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}},\ n > 1,$$

lucru ce se poate demonstra prin inducție.

Din (8) scoatem pe x_n:

$$x_n = 3 \cdot \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{8\sqrt{2}} -$$

$$- \frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1} - (3-2\sqrt{2})^{n-1}}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{2},\ (\forall) n \geqslant 1$$

și pentru $n = 1$, în adevăr $x_1 = 1$.

X.1.P.2[1]. Să admitem, prin absurd, că ecuația din enunț admite soluții în numere naturale. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune $x \leqslant y \leqslant z$ deci $t > z$.

Dacă $z = 1$, atunci $x = y = z = 1$ însă $t^t \neq 3$ pentru orice $t \in N$.

Dacă $z = 2$ atunci $t \geqslant 3$ deci $t^t \geqslant 3^3 > 3 \cdot 2^2 \geqslant x^x + y^y + z^z$, absurd.

Dacă $z \geqslant 3$, atunci $t^t \geqslant (z+1)^{z+1} > z^{z+1} \geqslant z \cdot z^z \geqslant 3 \cdot z^z \geqslant x^x + y^y + z^z$, absurd.

Ca atare, ecuația propusă nu admite soluții în numere naturale.

X.1.P.3[2]. Înmulțind cu 8 ambii membri ai ecuației, obținem:

$$8x(x^2+1) = (2y)^4.$$

sau:

$$(x+1)^4 - (x-1)^4 = (2y)^4$$

adică, altfel spus:

$$(x+1)^4 = (x-1)^4 + (2y)^4.$$

Ecuația de mai sus este de tip *Fermat* pentru care am văzut că nu putem avea soluții în numere naturale deci și întregi diferite de zero.

Egalitatea este satisfăcută numai cînd:

$$\begin{cases} x+1 = \pm(x-1) \\ 2y = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x+1 = \pm 2y \\ x-1 = 0. \end{cases}$$

Din primul sistem deducem $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, iar din al doilea $x_2 = 1$, $y_2 = 1$, $x_3 = 1$, $y_3 = -1$.

X.1.P.4[1]. În ecuația:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

care are, după cîte știm, soluțiile în numere întregi:

$$\begin{aligned} a &= 2kmn \\ b &= k(m^2 - n^2) \\ c &= k(m^2 + n^2) \end{aligned} \tag{2}$$

unde $k, m, n \in Z$, facem:

$$\begin{aligned} a &= x + y \\ b &= x - y \\ c &= 2z \end{aligned} \tag{3}$$

și obținem:

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \tag{4}$$

adică tocmai ecuația din enunț. Din (3) găsim:

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{k}{2}(m^2 + 2mn - n^2),$$

$$y = \frac{a-b}{2} = \frac{k}{2}(2mn - m^2 + n^2),$$

$$z = \frac{c}{2} = \frac{k}{2}(m^2 + n^2).$$

Cum $x, y, z \in Z$, iar m și n pot fi de paritate opusă, rămîne $k = 2k_1$, $k_1 \in Z$, deci ecuația din enunț are în numere întregi soluțiile:

$$\begin{aligned} x &= k_1(m^2 + 2mn - n^2), \\ y &= k_1(2mn - m^2 + n^2), \\ z &= k_1(m^2 + n^2) \end{aligned}$$

cu $m, n, k_1 \in Z$.

X.1.P.5². Să considerăm pentru început ecuația:

$$1! + 2! + \ldots + x! = y^{2t} \qquad (1)$$

adică exponentul lui y este par, $z = 2t$, $t \in N$. Se constată imediat că pentru $x < 5$ singurele soluții ale ecuației (1) sînt $x = 1$, căreia îi corespunde $y = \pm 1$ și t arbitrar (soluția $x = 1$ se obține și cînd z este impar), respectiv $x = 3$, $y = \pm 3$, $t = 1$.

Pentru $x \geqslant 5$ ecuația din enunț nu are soluții deoarece:

$$1! + 2! + \ldots + x! = 33 + 5! + 6! + \ldots + x! =$$
$$= \mathfrak{M}10 + 33 = \mathfrak{M}10 + 3$$

pentru că $5!, 6!, \ldots, x!$ sînt numere divizibile prin 10. Pătratul numărului y^t nu se poate termina decît cu una din cifrele 0, 1, 4, 9, 6, 5 după cum se poate constata din egalitatea:

$$(10k + \varepsilon)^2 = 100k^2 + 20k\varepsilon + \varepsilon^2$$

în care $k \in N \cup \{0\}$ iar $\varepsilon \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Rămîne că, în acest caz ($x \geqslant 5$) ecuația nu admite soluții.

Fie z impar. Dacă $z = 1$, x poate fi ales arbitrar și obținem că:

$$y = 1! + 2! + \ldots + x!$$

Fie acum $z \geqslant 3$. Se constată că pentru $x = 1$ se obține $y = 1$ și z oarecare. Pentru $2 \leqslant x \leqslant 8$ se constată prin calcul că nu există soluții. Se observă imediat că:

$$1! + 2! + \ldots + 8! = 46233$$

se divide la 9 fără a se divide la 27 și că:

$$9! + \ldots + x!$$

pentru $x \geqslant 9$ se divide la 27 deoarece toate numerele $9!, \ldots, x!$ se divid la 27. Deci:

$$y^z = 1! + 2! + \ldots + x!$$

se divide la 9 fără a se divide la 27. Rămîne că y se divide la 3 deci y^z se divide la 27 deoarece $z \geqslant 3$ absurd, deoarece un număr care se divide la 27 nu poate fi egal cu unul care nu se divide la 27. Rămîne deci că, în acest caz, ecuația nu are soluții.

Recapitulînd soluțiile, obținem:

$x = 1;\ y = 1;\ z$ oarecare,

$x = 1;\ y = -1;\ z$ oarecare dar par,

$x = 3;\ y = 3;\ z = 2,$

$x = 3;\ y = -3;\ z = 2.$

X.1.P.6[3]. Fie x, y, z, k patru numere naturale care satisfac ecuația:

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz. \qquad (*)$$

Să arătăm pentru început că:

$$x \leqslant \frac{kyz}{2},\ y \leqslant \frac{kxz}{2},\ z \leqslant \frac{kxy}{2}. \qquad (**)$$

În adevăr, dacă, de exemplu, $z > \frac{kxy}{2}$ atunci, deoarece pentru o soluție (x_1, y_1, z_1, k_1) formată cu cel mai mic număr z, $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = k_1x_1y_1z_1$ are loc și:

$$x_1^2 + y_1^2 + (k_1x_1y_1 - z_1)^2 = k_1x_1y_1(k_1x_1y_1 - z_1)$$

după cum se vede imediat din calcule și:

$$k_1x_1y_1 - z_1 < z_1,$$

contrar ipotezei.

Presupunem, fără a restrînge generalitatea, că $x \leqslant y \leqslant z$, în caz contrar schimbăm rolul necunoscutelor între ele. De aici rezultă:

$$y \leqslant z \leqslant \frac{kxy}{2}$$

deci:

$$1 \leqslant \frac{kx}{2}$$

adică:

$$kx \geqslant 2.$$

Evident, relația (*) se poate scrie sub forma:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{kxy}{2} - z\right)^2 = \left(\frac{kxy}{2}\right)^2.$$

Deoarece $z \leqslant \frac{kxy}{2}$ atunci, prin înlocuirea în membrul stîng al ultimei egalități a numărului z cu cu $y \leqslant z$, membrul stîng al acesteia crește (sau, în cazul $y = z$, nu se schimbă). Prin urmare:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{kxy}{2} - y\right)^2 \geqslant \frac{k^2x^2y^2}{4}$$

de unde, desfăcînd parantezele:

$$x^2 + 2y^2 \geqslant kxy^2. \qquad (1)$$

Cum $x \leqslant y$, găsim:

$$y^2 + 2y^2 \geqslant kxy^2$$

deci $kx \leqslant 3$.

În felul acesta $2 \leqslant kx \leqslant 3$. Dacă $xk = 2$, atunci (*) devine:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2yz$$

adică:

$$x^2 + (y - z)^2 = 0$$

deci $x = 0$, $y = z$, soluție inacceptabilă. Ca atare $kx = 3$. De aici $k = 1$ și $x = 3$ respectiv $k = 3$ și $x = 1$.

Din (1), făcînd $kx = 3$, deducem:

$$x^2 + 2y^2 \geqslant 3y^2$$

adică $x^2 \geqslant y^2$ deci $x \geqslant y$ și cum — s-a presupus — $x \leqslant y$, rezultă $x = y$.

Ecuația devine:

$$2x^2 + z^2 = 3xz$$

sau:

$$(z - x)(z - 2x) = 0.$$

Deducem $z = x$ sau $z = 2x$. Dar deoarece:

$$z \leqslant \frac{kxy}{2} = \frac{3y}{2} = \frac{3x}{2}$$

nu putem avea $z = 2x$ deci $z = x$. Ca atare $x = y = z$. Cum $kx = 3$, dacă avem $k = 3$ atunci $x = y = z = 1$ și dacă avem $k = 1$ atunci $x = y = z = 3$.

Am văzut însă că dacă (x, y, z) este soluție a problemei, avînd pe k fixat atunci și $(x, y, kxy - z)$ este soluție a problemei deci, cum pentru $k = 3$ ecuația are pe (1, 1, 1) drept soluție, avem și pe (1, 1, 2) drept soluție deci și pe (1, 2, 1) și de aici și pe (1, 2, 5) etc.

În final, conchidem că ecuația propusă are o infinitate de soluții.

X.1.P.7². Observăm că $x = 3$, $y = 1$ respectiv $x = 5$, $y = 3$ sînt soluții ale ecuației propuse. Să arătăm că acestea sînt unice.

Presupunem, prin absurd, că există o soluție (x, y) a ecuației cu $x > 5$. Împărțind cu 64 membrul întîi al ecuației din enunț, obținem restul 0. Membrul doi trebuie să dea, la împărțirea cu 64, același rest. Împărțind pe 3^n cu 64 obținem pentru $n = 1, 2, \ldots,$ 16, resturile 3, 9, 27, 17, 51, 25, 11, 33, 35, 41, 59, 49, 19, 57, 43, 1. Nu calculăm mai departe căci resturile se repetă din 16 în 16 deoarece:

$$3^{16m+r} - 3^{16l+r} = \mathfrak{M}(3^{16} - 1) = \mathfrak{M}((3^8 - 1)(3^8 + 1)) =$$
$$= \mathfrak{M}(6\,560 \cdot 6562) = \mathfrak{M}64$$

pentru $m > l$. Rezultă că y trebuie să fie de forma $y = 11 + 16k$. Vom arăta că nu există o asemenea soluție.

Pentru aceasta vom verifica resturile la împărțirile cu 17 ale ambilor membri. Dar:

$$3^{16} - 1 = 6560 \cdot 6\,562 = \mathfrak{M}17.$$

Deducem că 3^{ν} dă același rest ca și 3^{11} la împărțirea cu 17, adică 7.

Rămîne să arătăm că 2^n nu dă niciodată restul 12 la împărțirea cu 17. 2^n dă la împărțirea cu 17 resturile: 2, 4, 8, 16, 15, 13, 9, 1. Cu aceasta s-a dovedit că nu există soluții diferite de cele date la început (cazurile $x = 1, 2, 3, 4, 5$ se tratează ușor).

X.1.P.8. Dacă $x = y$ atunci:

$$2(x!) = (2x)!$$

deci, simplificînd:

$$2 = (x + 1) \dots (2x)$$

adică $x = 1$ deci $y = 1$.

Fie $x < y$. Obținem:

$$x![1 + (x + 1) \dots y] = (x + y)!$$

deci:

$$1 + (x + 1) \dots y = (x + 1) \dots (x + y)$$

adică:

$$1 = (x + 1)\,[(x + 2) \dots (x + y) - (x + 2) \dots y]$$

absurd. Deci $x = y = 1$ este singura soluție.

X.1.P.9[1]. Considerăm identitatea:

$$2^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)\,(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1).$$

Deoarece $5 = 2^2 + 1 \mid 2^{4n+2} + 1$ și pentru $n > 1$:

$$2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+1}(2^n - 1) + 1 \geqslant 2^3 \cdot 3 + 1 = 25$$

deci numărul $\frac{1}{5}\,(2^{4n+2} + 1)$ este produsul a doi factori supraunitari, ceea ce dovedește că nu poate fi egal cu un număr prim, deci ecuația propusă în acest caz nu are soluții de tipul cerut. Pentru $n = 1$, ecuația devine $65 = 5p$ deci $p = 13$, care verifică.

X.1.P.10[1]. Cum $24p + 1$ este impar, k este impar, $k = 2t + 1$. Ecuația se transcrie:

$$24p + 1 = (2t + 1)^2$$

sau, după oarecare simplificări:

$$6p = t(t + 1)$$

Dacă $t = 6$, atunci $p = 7$.

Dacă $t = 2$, $p = 1$, nu convine, 1 nefiind număr prim.

Dacă $t = 5$, atunci $p = 5$.

În continuare, sînt posibile cazurile:

a°). $t = 6u$ deci $p = u(6u + 1)$ de unde $u = 1$ deci $p = 7$, caz analizat;

b°). $t + 1 = 6u$. Obținem $p = u(6u - 1)$ de unde $p = 5$, caz analizat;

c°). $t = 2v$, $t + 1 = 3m$ deci $p = vm$ și, în felul acesta, $3m - 2v = 1$ și $v = 1$, $m = p$ sau $v = p, m = 1$. Din prima situație găsim $m = 1$ iar din a doua $v = 1$, ambele conducînd la $p = 1$, caz exclus.

Singurele soluții rămîn așadar:

1°). $p = 2$, $k = 7$;

2°). $p = 5$, $k = 11$;

3°). $p = 7$, $k = 13$.

X.1.P.11*. Pentru k par și $p > 5$, ecuația:

$$(k - 1)!\,(p - k)! + (-1)^{k+1} = p^m \qquad (1)$$

nu are soluții, deoarece din:

$$2 < \frac{p-1}{2} \text{ și } p - 1 = 2 \cdot \frac{p-1}{2} \Big| (k - 1)!\,(p - k)!$$

ar urma ca $p - 1 \mid p^m + 1 = p^m - 1 + 2$ adică $p - 1 \mid 2$ de unde $p = 2$ sau $p = 3$.

Așadar k trebuie să fie impar și (1) devine:

$$(k - 1)!\,(p - k)! = p^m - 1. \qquad (2)$$

Însă p, fiind prim, este una din formele $3q + 1$ sau $3q - 1$.

a°). Fie $p = 3q + 1$. Pentru $p > 7$, deci $p > 10$ (deoarece p este prim iar 8, 9, 10 nu sînt prime), cum $\frac{p-1}{3}$ și $\frac{p-1}{2}$ sînt numere naturale și cum:

$$2 < 3 < \frac{p-1}{3} < \frac{p-1}{2}$$

rezultă:

$$(p-1)^2 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{p-1}{3} \cdot \frac{p-1}{2} \Big| \left(\frac{p-1}{2}\right)! \Big| (k-1)!\,(p-k)!$$

și de aici deducem (folosind și (2)):

$$(p-1)^2 \mid p^m - 1 \tag{3}$$

de unde:

$$p - 1 \mid p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1 = \\ = p^{m-1} - 1 + \ldots + p - 1 + m \tag{4}$$

și cum $p - 1 \mid p^s - 1$ pentru orice $s \in N$, pentru ca (4) să aibă loc, trebuie ca $p - 1 \mid m$, de unde $m \geqslant p - 1$ deci:

$$p^m > p^m - 1 > (p-1)^{p-1} > (p-1)! \geqslant (k-1)!\,(p-k)! \tag{5}$$

deci $p^m - 1 > (k-1)!(p-k)!$, ca atare ecuația (2) nu are soluții.

b°). Considerăm cazul $p = 3q - 1$. Dacă $p - k \neq k - 1$ atunci unul dintre numerele respective este mai mare decît $\frac{p+1}{2}$ și cum $\frac{p+1}{2}$ și $\frac{p+1}{3}$ sînt întregi iar pentru $p > 7$, deci $p > 8$:

$$2 < 3 < \frac{p+1}{3} < \frac{p+1}{2}$$

găsim:

$$(p+1)^2 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{p+1}{3} \cdot \frac{p+1}{2} \Big| \left(\frac{p+1}{2}\right)! \Big| (k-1)!\,(p-k)!$$

iar de aici și din (2) deducem:

$$(p+1)^2 \mid p^m - 1 \tag{6}$$

Dar cum din $p+1 \mid p^m - 1$ rezultă m par, relația (6) se poate scrie:

$$(p+1)^2 \mid p^m - 1 = (p+1-1)^m - 1 = \\ = \mathfrak{M}(p+1)^2 - m(p+1). \tag{6'}$$

Pentru ca (6') să aibă loc trebuie ca $p+1 \mid m$, de unde $m \geqslant p+1$ deci cu atît mai mult au loc inegalitățile (5) și, în consecință, ecuația (2) nu are soluții.

În fine, dacă $p - k = k - 1$, deci $k = \frac{p+1}{2}$, ecuația (2) capătă forma:

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 = p^m - 1 \tag{7}$$

de unde, pentru $p > 7$, din:

$$2 < \frac{p-1}{2} \text{ și } p - 1 = 2 \cdot \frac{p-1}{2} \,\Big|\, \frac{p-1}{2}!$$

și deci $(p-1)^2 \mid \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2$ și din (7), obținem $(p-1)^2 \mid p^m - 1$, caz studiat anterior.

Dacă $2 \leqslant p \leqslant 7$, ecuația (1) are drept soluții:

$p = 2$, care conduce la $k = 1$, $m = 1$;

$p = 3$, care conduce la $k = 1$, $m = 1$, respectiv $k = 3$, $m = 1$;

$p = 5$, care conduce la $k = 1$, $m = 2$, respectiv $k = 2$, $m = 1$, respectiv $k = 3$, $m = 1$;

$p = 7$, care conduce la $k = 3$, $m = 2$, respectiv $k = 5$, $m = 2$.

Dacă punem $k = 1$ în enunțul problemei, obținem așa-numita teoremă a lui *Liouville*.

X.1.P.12[1]. Presupunem că ecuația admite soluții. Cum:

$2^{4^n} = 16^n = (5 + 1)^n = \mathfrak{M}5 + 1$, $2^{4^{n+1}} = \mathfrak{M}10 + 2$

obținem:

$$2^{2^{4^n+1}} + 27 = 2^{10k+2} + 27 = 4 \cdot 32^{2k} + 27 =$$
$$= 4(31 + 1)^{2k} + 27 = \mathfrak{M}31 + 31 = \mathfrak{M}31,\ k \in N,$$

fapt ce dovedește că p este compus, contrar presupunerii că acesta este prim.

X.1.P.13[1]. Ecuația, evident, se mai poate scrie:

$$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = a^2 \qquad (1)$$

unde a, potrivit enunțului, este natural. De aici:

$$(2p^2 + p)^2 < (2a)^2 < (2p^2 + p + 2)^2.$$

Trebuie deci ca:

$(2a)^2 = (2p^2 + p + 1)^2 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$

și, ținînd seama de (1), găsim:

$$p^2 - 2p - 3 = 0$$

de unde $p = 3$ deci $a = 11$.

X.1.P.14[2]. Să admitem că:

$$4^n(8k - 1) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (1)$$

unde x, y, z sînt întregi (unul sau două dintre ele pot fi nule). Dacă $n = 0$, egalitatea precedentă este imposibilă deoarece pătratul unui număr impar $2t + 1$ este de forma $8u + 1$, $u \in N$, întrucît $(2t + 1)^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 4t(t + 1) + 1$, iar produsul $t(t + 1)$ se divide prin 2 și pătratul unui număr par este multiplu de 4, or, membrul 2 al egalității (1) este de forma $8u + 3$ dacă toate numerele sînt impare sau de forma $4u + 2$ dacă unul este par și celelalte impare sau, în fine, de forma $4u$ dacă toate sînt pare (avem și cazul cînd un număr este impar iar celelalte două sînt impare, în care caz membrul 2 este de forma $4u + 1$) deci, oricum, egalitatea (1) este imposibilă.

Dacă $n > 0$, membrul stîng este multiplu de 4 deci în membrul drept putem avea două numere impare și unul par, în care caz suma $x^2 + y^2 + z^2$ devine de forma $4u + 2$, absurd, sau toate numerele pare $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, în care caz ecuația (1) devine:

$$4^{n-1}(8k - 1) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \qquad (1')$$

Repetînd raționamentul, ajungem la ecuația:

$$8k - 1 = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2$$

care, am văzut, nu are soluții de tipul cerut.

Oricum, ecuația propusă nu are soluții în numere naturale.

X.1.P.15². A se vedea problema precedentă.

X.1.P.16¹. Ecuația se mai poate scrie:

$$\frac{a(10^n - 1)}{9} = k^2.$$

Fie $n \geqslant 2$. Primul membru, avînd în vedere faptul că $1 \leqslant a \leqslant 9$, nu reprezintă altceva decît numărul cu n cifre $\overline{aa \ldots a}$, toate egale cu a, deoarece:

$$\overline{\underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ de } a}} = a + a \cdot 10 + \ldots + a \cdot 10^{n-1} =$$

$$= a(1 + \ldots + 10^{n-1}) = a \cdot \frac{10^n - 1}{9}.$$

Pe de altă parte, orice pătrat perfect este de forma $4m$ sau $4m + 1$. Dar numerele:

$$22\ldots22 = \mathfrak{M}4 + 2,$$
$$55\ldots55 = \mathfrak{M}4 + 3,$$
$$66\ldots66 = \mathfrak{M}4 + 2,$$
$$99\ldots99 = \mathfrak{M}4 + 3$$

potrivit observației precedente, nu sînt pătrate perfecte.

Din faptul că 99...99 nu este pătrat perfect urmează că nici 11...11 nu este pătrat perfect deoarece dacă ar fi așa, produsul $9 \cdot 11...11 = 99...99$ dintre două pătrate perfecte ar fi pătrat perfect. De aici rezultă că nici numărul 44...44 nu poate fi pătrat perfect și nici 88...88 deoarece acest din urmă număr este egal cu 4.22...22 și 22...22 nu este pătrat perfect.

Cum nici un pătrat perufect nu se termină cu vreuna din cifrele 3 sau 7 rezultă că nici 33...33 respectiv 77...77 nu sînt pătrate perfecte.

Cazul $n = 1$ conduce la $a = 1$, $k = 1$ respectiv $a = 4$, $k = 2$ respectiv $a = 9$, $k = 3$.

X.1.P.17. Deoarece $7! > 1\,000$ rezultă că nici unul din numerele x, y, z nu poate depăși pe 6. De asemenea nici unul din numerele x, y, z nu poate fi 6 deoarece, în acest caz, $x! + y! + z! > 700$ în timp ce $100x + 10y + z < 700$. Să arătăm că unul din numerele x, y, z trebuie să fie egal cu 5.

În adevăr, dacă nici un număr nu ar fi 5, atunci $x! + y! + z! < 100$ dar:

$$100x + 10y + z$$

trebuie să fie un număr de trei cifre. Deoarece $x! + y! + z! \leqslant 5! + 5! + 5! = 360$ rezultă că $x \leqslant 3$. Dar, dacă $x = 3$ atunci $x! + y! + z! \leqslant 3! + 5! + 5! < 300$ ori $100x + 10y + z > 300$. Deci $x \leqslant 2$. Dacă $x = 2$ atunci $x! + y! + z! \leqslant 2! + 5! + 5! = 242$ și, în cazul egalității, $100x + 10y + z = 255$. Trebuie deci ca $y \leqslant 4$ sau $z \leqslant 4$ caz în care $x! + y! + z! \leqslant 2! + 4! + 5! = 146$ pe cînd $100x + 10y + z > 200$. Deci $x \leqslant 1$, adică $x = 1$. Ca atare ecuația va avea una din formele (reținînd că un număr trebuie să fie egal cu 5):

$$100 + 50 + z = 5! + 1! + z!, \text{ dacă } y = 5,$$

$$100 + 10y + 5 = 1! + 5! + y!, \text{ dacă } z = 5.$$

În primul caz obținem:

$$150 + z = 121 + z!$$

sau:

$$29 = z[(z - 1)! - 1]$$

care nu se verifică pentru nici un $z \leqslant 5$.

În al doilea caz:

$$105 + 10y = 121 + y!$$

de unde:

$$y[10 - (y - 1)!] = 16$$

deci y poate fi 2 sau 4. Se constată că numai $y = 4$ verifică toate condițiile problemei. În felul acesta, $x = 1$, $y = 4$, $z = 5$.

X.1.P.18[3]. Evident, $n = 1$ verifică ecuația. Trebuie, cercetînd enunțul, ca $10^{n-1} < n^n \leqslant 10^n$, deoarece $[\lg n^n]_* + 1$ reprezintă, după cîte știm, numărul de cifre ale lui n^n, deci $n \leqslant 10$. Pe de altă parte $n^{n-1} \cdot n \geqslant 10^{n-1}$ sau $n^{n-1} \cdot n \geqslant 5^{n-1} \cdot 2^{n-1}$ deci $n > 5$. Numerele 6 și 7 nu verifică. De asemenea, nici $n = 10$. Însă $8^8 = 16777216$ are opt cifre și $9^9 = 387420489$ are nouă cifre deci avem $n = 8$ și $n = 9$ drept soluții ale problemei, alături de $n = 1$.

X.1.P.19. Ecuația capătă forma:

$$(n - 3)! = (n - 1)\, n(n + 1).$$

Cum:

$$(n - 5)\,(n - 3)\,(n - 4) < (n - 1)n(n + 1)$$

înseamnă că $(n - 3)!$ trebuie să conțină cel puțin produsul a patru factori:

$$(n - 3)\,(n - 4)\,(n - 5)\,(n - 6)$$

și cel mai mic, adică $n - 6$, să fie supraunitar ($n = 7$ nu verifică) deci $n \geqslant 8$.

Dar pentru $n \geqslant 10$, găsim:

$$(n-3)! \geqslant (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)3 \vdots 2 \cdot 1 =$$
$$= 6(n^2 - 9n + 18)(n^2 - 9n + 20) > 6n(n-9)(n-1) \cdot$$
$$\cdot (n-8) > (n-1)n(n+1)$$

deci pentru $n \geqslant 10$, ecuația nu are soluții. Verifică ecuația $n = 9$ ($n = 8$ nu verifică).

X.1.P.20. Un raționament analog cu cel făcut în soluția problemei precedente conduce la soluția $n = 7$.

X.1.P.21. Evident, pentru a impar:

$$p = n^a - 1 = (n-1)(n^{a-1} + n^{a-2} + \ldots + 1)$$

și cum p este prim rezultă $n - 1 = 1$ deci $n = 2$ de unde $p = 2^a - 1$.

Pentru a par, $a = 2^t k$, k impar:

$$n^{2k} - 1 = (n^{2^t})^k - 1 = (n^{2^t} - 1)(n^{2^t(k-1)} + \ldots + 1)$$

și se repetă raționamentul obținînd tot $n = 2$. Pentru $a = 2$ avem $p = 3$. Pentru $a = 3$ obținem $p = 7$, $a = 4$ dă $p = 15$, soluție care nu convine, $a = 5$ conduce la $p = 31$.

Avem, cercetînd toate cazurile pentru a:

$$a = 2,\ p = 3;$$
$$a = 3,\ p = 7;$$
$$a = 5,\ p = 31;$$
$$a = 7,\ p = 127.$$

X.1.P.22. Deducem imediat:

$$m^2 + k^2 = 2n^2$$

și ne situăm în condițiile problemei X.1.P.4. Așadar:

$$m = \rho(a^2 + 2ab - b^2),$$
$$k = \rho(2ab - a^2 + b^2),$$
$$n = \rho(a^2 + b^2),$$

cu $a, b, \rho \in Z$. De aici:

$$t = \frac{\rho^2}{2}(a^2 + b^2)^2$$

$$u = \rho^2(a^2 + b^2)^2 - \rho^2(a^2 + 2ab - b^2)^2.$$

Făcînd $\rho = 2\rho_1$, $\rho_1 \in Z$, obținem:

$$\begin{aligned} m &= 2\rho_1(a^2 + 2ab - b^2), \\ k &= 2\rho_1(2ab - a^2 + b^2), \\ n &= 2\rho_1(a^2 + b^2), \\ t &= 2\rho_1^2(a^4 + 2a^2b^2 + b^4), \\ u &= 4\rho_1^2(-4a^3b + 4ab^3). \end{aligned}$$

X.1.P.23[1]. Fie:

$$n = a^2 + b^2$$

$$n = c^2 + d^2$$

cele două reprezentări diferite ale lui $n((a, b) \neq (c, d))$. Dacă numerele a și b, respectiv c și d au aceeași paritate, este clar că n este compus. Presupunem, așadar, că a și b respectiv c și d au parități diferite. Este clar că:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

de unde:

$$(a - c)(a + c) = (d - b)(d + b)$$

adică, altfel scris (presupunem $d \neq b$):

$$\frac{a - c}{d - b} = \frac{d + b}{a + c} = \frac{u}{v}$$

deci:

$$a - c = tu,\ d + b = su,$$

$$d - b = tv,\ a + c = sv,\ t, s, u, v \in N$$

de unde, în definitiv:

$$a = \frac{1}{2}(tu + sv);\ b = \frac{1}{2}(su - tv)$$

deci:

$$n = a^2 + b^2 = \frac{1}{4}\left[(tu + sv)^2 + (su - tv)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(u^2 + v^2)(t^2 + s^2).$$

Nu este însă posibil ca $u^2 + v^2 = 4$ sau $t^2 + s^2 = 4$ deci n este compus.

X.1.P.24. Numărul n are una din formele $4m$, $4m + 1$, $4m + 2$, $4m + 3$, $m \in N$. Din egalitățile:

$$4m = (2m - 1) + (2m + 1),$$

$$4m + 1 = 2m + (2m + 1),$$

$$4m + 2 = (2m + 1) + (2m + 3),$$

$$4m + 3 = (2m + 1) + (2m + 2)$$

rezultă afirmația din enunțul problemei.

X.1.P.25*. Cum p este prim și $p > 3$ rezultă $p = 6k \pm 1$, $k \in N$, deci $4p^2 + 1 = 4(6k \pm 1)^2 + 1 = (8k \pm 2)^2 + (8k \pm 1)^2 + (4k)^2$ de unde rezultă afirmația din enunțul problemei.

X.1.P.26*. Dacă $p = 2$ luăm x și y de parități diferite și afirmația este evidentă.

Fie p un număr prim impar și n un număr natural prim cu p, $_*(n, p) = 1$.

Considerăm $\frac{p+1}{2}$ numere $0, n, 2n, \ldots, \frac{p-1}{2}n$. Pătratele oricăror două dintre ele dau prin împărțirea la p resturi diferite; într-adevăr, dacă am avea:

$$(x_1 n)^2 = q_1 p + r$$

și:

$$(y_1 n)^2 = q_2 p + r$$

cu $x_1 \neq y_1$, atunci:

$$(x_1 n)^2 - (y_1 n)^2 = n^2(x_1 - y_1)(x_1 + y_1) = (q_1 - q_2)p,$$

adică p ar divide produsul:

$$n^2(x_1 - y_1)(x_1 + y_1)$$

ceea ce este imposibil fiindcă $*(p, n) = 1$ și din $x_1 < \frac{p}{2}$, $y_1 < \frac{p}{2}$ rezultă $x_1 + y_1 < p$ și, respectiv $|x_1 - y_1| < p$. Astfel, aceste $\frac{p+1}{2}$ numere:

$$0^2, n^2, (2n)^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}n\right)^2 \qquad (1)$$

prin împărțire la p dau $\frac{p+1}{2}$ resturi diferite.

Analog și următoarele $\frac{p+1}{2}$ numere:

$$-1, -n^2 - 1, -(2n)^2 - 1, \ldots, -\left(\frac{p-1}{2}n\right)^2 - 1 \qquad (2)$$

prin împărțire la p dau $\frac{p+1}{2}$ resturi diferite.

Rezultă atunci că între cele $p + 1$ numere din șirurile (1) și (2) există o pereche care prin împărțire la p să dea același rest r. Unul din numerele perechii este de forma $(nx_1)^2$, iar celălalt de forma $-(ny_1)^2 - 1$. Deci $(nx_1)^2 = q_1p + r$ și $-(ny_1)^2 - 1 = q_2p + r$.

Rezultă de aici:

$$(nx_1)^2 + (ny_1)^2 + 1 = (q_1 - q_2)p = kp.$$

Notînd $nx_1 = x, ny_1 = y$ obținem:

$$x^2 + y^2 + 1 = kp.$$

Dînd lui n o infinitate de valori prime cu p, de exemplu $n = up + 1$, cu $u = 0, 1, 2, \ldots$, rezultă afirmația făcută în enunțul problemei.

X.1.P.27. Deoarece q_i sînt numere prime, cu necesitate există i, $1 \leqslant i \leqslant k$, astfel ca $q_i = 5$ deci ecuația devine:

$$(q_1 - 1) \dots (q_{i-1} - 1)(q_{i+1} - 1) \dots (q_k - 1) = \\ = q_1 \cdots q_{i-1} q_{i+1} \cdots q_k.$$

Dacă însă $k \geqslant 2$ se vede că ultima egalitate nu este posibilă, deci $k = 1$, $q_1 = 5$.

X.1.P.28. Orice număr întreg poate fi scris sub una din formele $3k$, $3k \pm 1$, unde $k \in Z$. Fie $x = 3k_1 + t_1$, $y = 3k_2 + t_2$, $z = 3k_3 + t_3$ unde k_1, k_2, $k_3 \in Z$ iar t_1, t_2, t_3 pot lua valorile 0, -1, 1. Pentru aceste valori:

$$E = x^3 + y^3 + z^3 = (3k_1 + t_1)^3 + (3k_2 + t_2)^3 + \\ + (3k_3 + t_3)^3 = \mathfrak{M}9 + t_1^3 + t_2^3 + t_3^3.$$

Deoarece expresia $t_1^3 + t_2^3 + t_3^3$ poate lua valori numai în mulțimea $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, ecuația propusă nu admite soluții în numere întregi.

X.2.0. Divizibilitatea numerelor.

X.2.1. Din această importantă clasă de probleme — legate de chestiuni de divizibilitate — un loc preponderent îi ocupă *Mica teoremă a lui Fermat*:

dacă p este un număr prim, atunci pentru orice număr întreg a:

$$a^p - a \vdots p. \qquad \text{(X.2.1.1)}$$

Demonstrație. Fie p un număr prim dat. Dacă $p = 2$ atunci, evident, $a^2 - a = a(a - 1) \vdots 2$ deci putem presupune $p > 2$. Dacă $a = 1$, evident, $1^p - 1 \vdots p$. Să demonstrăm că, în general, $a^p - a \vdots p$, $(\forall) a \in N$ (pentru $p > 2$ și a negativ, $a^p - a = -[(-a)^p - (-a)]$).

Raționăm prin inducție completă după a. Pentru $a = 1$, verificîndu-se, presupunem afirmația vala-

bilă pentru un a oarecare (natural). Conform dezvoltării binomului după *Newton*:

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1} a + 1 \qquad \text{(X.2.1.2)}$$

Dar $\binom{p}{k} \vdots p$, $(\forall) k < p$.

În adevăr, explicitarea lui $\binom{p}{k}$:

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}, \quad k = 1, 2, \ldots, p-1,$$

rezultă că numitorul $k!(p-k)!$ nu conține în descompunerea canonică pe p, pe cînd numărătorul îl conține.

Ca atare:

$$(a+1)^p - a^p - 1 \vdots p. \qquad \text{(X.2.1.3)}$$

Dar $a^p - a \vdots p$, potrivit presupunerii făcute deci, adunînd cele două relații:

$$(a+1)^p - a^p - 1 + a^p - a = (a+1)^p - (a+1) \vdots p, \qquad \text{(X.2.1.4)}$$

ceea ce trebuia demonstrat. În virtutea principiului inducției matematice, afirmația este valabilă pentru orice $a \in N$ și orice p prim.

X.2.2. Dacă p este un număr prim și:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad \text{(X.2.2.1)}$$

este un polinom de gradul $n \geqslant 1$ cu coeficienți întregi (a_0 nu se divide la p) atunci printre numerele:

$$x \mapsto 0, 1, 2, \ldots, p-1 \qquad \text{(X.2.2.2)}$$

există cel mult n numere pentru care $f(x)$ se divide la p (chiar nici unul) (teorema lui *Lagrange*).

Demonstrație. Raționăm prin inducție. Teorema este adevărată pentru polinomul de gradul I. În adevăr, dacă printre numerele din șirul (X.2.2.2) ar exista cel puțin două numere diferite x_1 și x_2, cu $x_1 < x_2$, de exemplu, în așa fel ca $p \mid f(x_1)$ și $p \mid f(x_2)$ și cum $f(x) = a_0x + a_1$ cu $a_0 \nmid p$ deci am avea, prin scădere, $p \mid a_0(x_1 - x_2)$ adică $p \mid (x_2 - x_1)$ absurd căci $|x_2 - x_1| \leqslant p - 1$.

Fie $n \in N$, oarecare și mai mare ca 1. Să presupunem că teorema este adevărată pentru polinoamele de grad $n - 1$ și, prin absurd, că pentru un polinom de forma (X.2.2.1) (deci de gradul n) teorema este falsă adică există $n + 1$ întregi $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, unde $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} < p$, astfel încît $p \mid f(x_i)$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Evident:

$$f(x) - f(x_1) = a_0(x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \\ + \ldots + a_{n-1}(x - x_1).$$

Deoarece:

$$(x^k - x_1^k) \vdots (x - x_1)$$

pentru $k = 2, 3, \ldots n$, găsim că:

$$f(x) - f(x_1) = f_1(x)\,(x - x_1) \qquad \text{(X.2.2.3)}$$

unde $f_1(x)$ este un polinom de gradul $n - 1$ cu coeficienți întregi, care depind de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ și x_1 iar coeficientul lui x^{n-1} va fi a_0 și deci a_0 nu se divide la p. Pe baza identității (X.2.2.3), obținem:

$$f(x_i) - f(x_1) = (x_i - x_1)f_1(x_i) \qquad \text{(X.2.2.4)}$$

pentru $i = 2, 3, \ldots n + 1$.

Dar din faptul că $p \mid f(x_i)$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ rezultă că $p \mid f(x_i) - f(x_1)$ pentru $i = 2, 3, \ldots, n + 1$ și, deoarece diferențele $x_i - x_1$, pentru $i = 2, 3, \ldots, n + 1$, nu se divid la p, urmează:

$$p \mid f_1(x_i) \text{ pentru } i = 2, 3, \ldots, n + 1$$

în contradicție cu faptul presupus, anume că teorema este adevărată pentru polinoamele de gradul $n - 1$.

De aici deducem următoarea consecință:

dacă p este un număr prim iar f un polinom de gradul n cu coeficienți întregi și dacă există mai mult decît n numere naturale $x < p$ pentru care $f(x)$ se divide la p, atunci toți coeficienții polinomului f se divid la p.

Demonstrație. Să presupunem că polinomul f satisface condițiile consecinței dar nu toți coeficienții săi se divid la p. Fie a_{n-k} primul coeficient care nu se divide la p. Presupunem $k > 0$. Pentru orice număr natural x pentru care $f(x)$ se divide la p, evident că:

$$g(x) = a_{n-k}x^k + a_{n-k+1}x^{g-1} + \ldots + a_n$$

se divide, de asemenea, la p. Astfel, pentru un polinom $g(x)$, de grad k, există mai mult decît n, și deoarece $k \leqslant n$, mai mult decît k numere naturale $x < p$, pentru care $p \mid g(x)$, ceea ce contrazice teorema lui *Lagrange* (aplicabilă pentru cazul de față, deoarece a_{n-k} nu se divide la p). De aceea $k = 0$, deci toți coeficienții polinomului f, în afară eventual de a_n, se divid la p. Dar, în acest caz, întrucît există numărul x pentru care $f(x)$ se divide la p, pornind de la formulele (X.2.2.1), tragem concluzia că $p \mid a_n$. Așadar, ipoteza că, respectiv, această consecință este falsă, conduce la o contradicție.

X.2.3. Folosind rezultatele anterioare să demonstrăm *teorema lui Wilson*:

$$(p-1)! + 1 \vdots p \qquad \text{(X.2.3.1)}$$

dacă și numai dacă p este prim.

Demonstrație. Fie p un număr prim și:

$$f(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) - x^{p-1} + 1 \qquad \text{(X.2.3.2)}$$

un polinom de gradul $p-2$, cu coeficienți întregi. Pentru $x = 1, 2, \ldots, p-1$, conform teoremei lui *Fermat*, $p \mid x^p - x = x(x^{p-1} - 1)$, de unde $p \mid x^{p-1} - 1$. Dar pentru $x = 1, 2, \ldots, p-1$, evident:

$$p \mid (x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)$$

deoarece pentru un astfel de x unul din factorii acestui produs este egal cu zero. Din expresia lui $f(x)$ și ținînd seama că diferența a două numere care se divid la p se divide la p, deducem că $p \mid f(x)$ pentru $x = 1, 2, \ldots, p-1$.

Astfel, conform corolarului teoremei lui *Lagrange* (demonstrat anterior), făcînd $n = p - 2$, putem concluziona că toți coeficienții polinomului, deci și termenul liber se divid la p.

Dar pentru p impar, termenul liber al polinomului f este $1 \cdot 2 \ldots (p-1) + 1$ sau, altfel scris, $(p-1)! + 1$. Rezultă deci că dacă p este un număr prim impar, $p \mid (p-1)! + 1$, afirmație ce se verifică și pentru $p = 2$, deoarece $1! + 1 = 2 \vdots 2$.

Reciproc, dacă $(p-1)! + 1 \vdots p$, să arătăm că p este prim. În adevăr, dacă n ar fi un număr compus, $n = ab$, a, $b \in N$, a, $b > 1$, numărul $(n-1)! + 1$ ar da prin împărțire la a restul 1, absurd, deoarece, prin ipoteză, restul acestei împărțiri trebuie să fie 0, de unde deducem că n trebuie să fie prim.

Deducem de aici următoarea consecință importantă:

Dacă p este un număr prim de forma $4k + 1$, atunci numărul:

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + 1 \qquad \text{(X.2.3.3)}$$

se divide la p.

Demonstrație. Fie p un număr prim de forma $4k + 1$. Luînd în considerație numerele pare $\frac{p-1}{2} = 2k$, găsim că numărul:

$$1 \cdot 2 \ldots \frac{p-1}{2} = (-1)(-2)\ldots\left(-\frac{p-1}{2}\right) \qquad \text{(X.2.3.4)}$$

dă prin împărțirea la p același rest ca și numărul:

$$(p-1)(p-2)\ldots\left(p - \frac{p-1}{2}\right). \qquad \text{(X.2.3.5)}$$

Dar ultimul număr poate fi reprezentat sub forma de mai jos, dacă scriem factorii în ordinea inversă:

$$\frac{p+1}{2}\left(\frac{p+1}{2}+1\right)\ldots(p-2)(p-1). \quad \text{(X.2.3.6)}$$

Dacă înmulțim expresia de mai sus cu $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ și observăm că $\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2}+1$, obținem că numărul la care am ajuns, $(p-1)!$, dă prin împărțire la p același rest ca și $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2$. Deoarece, conform teoremei lui *Wilson*, numărul $(p-1)!+1$ se divide la p, rezultă că și numărul $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2+1$ se divide la p, ceea ce trebuia demonstrat.

X.2.4. Fie $m \in N$ și p un număr prim $(p < m)$. Exponentul lui p în produsul $m! = 1 \cdot 2 \ldots m$ este dat de:

$$S_p = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^k}\right]_*. \quad \text{(X.2.4.1)}$$

În adevăr, în $m!$ intră produsul:

$$p \times (2 \times p) \times (3 \times p) \times \ldots \times \left(\left[\frac{m}{p}\right]_* \times p\right) =$$

$$= \left[\frac{m}{p}\right]_*! \times p^{\left[\frac{m}{p}\right]_*}. \quad \text{(X.2.4.2)}$$

Așadar, $m!$ se divide cu:

$$p^{\left[\frac{m}{p}\right]_*}$$

dar și cu acea putere a lui p care intră în produsul $\left[\frac{m}{p}\right]_*!$ adică cu:

$$p \times (2 \times p) \times \ldots \times \left[\left(\left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]_*}{p}\right]_*\right) \times p\right] = \left[\frac{m}{p^2}\right]_*! \times p^{\left[\frac{m}{p^2}\right]_*}. \qquad \text{(X.2.4.2.1)}$$

Continuăm astfel pînă ajungem la exponentul s cu proprietatea:

$$p^s \leqslant m < p^{s+1}$$

(este clar că $\left[\frac{m}{p^k}\right]_* = 0$ pentru orice k pentru care $p^k > m$). Rezultă, în definitiv, că în suma S_p din enunț nu are importanță dacă numărul k ia toate valorile naturale.

Un alt mod de a determina pe S_p se bazează pe algoritmul lui *Euclid*. Are loc:

$$\begin{aligned} m &= pq_1 + r_1 (0 \leqslant r_1 < p) \\ q_1 &= pq_2 + r_2 (0 \leqslant r_2 < p) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{k-1} &= pq_k + r_k (0 \leqslant r_k < p) \end{aligned} \qquad \text{(X.2.4.3)}$$

pînă ajungem la $q_k = 0$.

Exponentul căutat este deci dat de:

$$S_p = q_1 + q_2 + \ldots + q_k.$$

Resturile $r_1, r_2, \ldots, r_k$ în ordine inversă sînt tocmai cifrele lui m, dacă m este scris în baza p. Aceasta rezultă din faptul că, dacă din ecuațiile (X.2.4.3) eliminăm pe $q_1, \ldots, q_k$ obținem:

$$m = p^{k-1} r_k + \ldots + r_1.$$

Fie:

$$x = r_1 + \ldots + r_k$$

Dacă adunăm egalitățile (X.2.4.3), folosind notațiile făcute mai sus, găsim:

$$m + S_p = pS_p + x$$

de unde:

$$S_p = \frac{m - x}{p - 1} \qquad \text{(X.2.4.4)}$$

adică tocmai teorema lui *Legendre*.

X.2.5. Două numere întregi a și b se numesc *congruente* față de $m \in Z - \{0\}$, atunci cînd $m \mid a - b$ și se scrie $a \equiv b \pmod{m}$ sau, altfel spus, dacă la împărțirea prin m dau același rest. Se verifică imediat că relația de congruență este reflexivă, simetrică și tranzitivă deci este o relație de echivalență; în raport cu relația de congruență introdusă, Z, mulțimea numerelor întregi, este împărțită în clase de echivalență, numite și *clase de resturi* modulo m.

X.2.5.0. *Definiție.* Numerele întregi:

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \qquad \text{(X.2.5.0.1)}$$

formează un *sistem complet de resturi* modulo m dacă oricare două dintre ele sînt necongruente modulo m.

X.2.5.1. *Definiție.* Dacă $\varphi(m)$ definește funcția lui *Euler*, care indică numărul de numere mai mici decît m, relativ prime cu m și a cărui valoare este:

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_{i_1}}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_{i_k}}\right)$$

(vezi X.0.P.10) cînd $m = p_{i_1}^{\alpha_1} \ldots p_{i_k}^{\alpha_k}$, $\alpha_i \geqslant 1$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ atunci numerele:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)} \qquad \text{(X.2.5.1.1)}$$

formează un *sistem redus de resturi* modulo m dacă fiecare este prim cu modulul m și oricare două sînt necongruente modulo m.

Se stabilesc imediat propozițiile:

1°). Dacă:

$$\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_m \\ b_1, b_2, \ldots, b_m \end{matrix} \qquad \text{(X.2.5.2)}$$

sînt două sisteme complete de resturi modulo m, atunci fiecare număr din primul sistem este congruent cu unul și numai cu unul din numerele de-al doilea sistem;

2°). Dacă:

$$a_1, \ldots, a_m \qquad \text{(X.2.5.3)}$$

este un sistem complet de resturi modulo m și a este un întreg prim cu modulul m, atunci șirul:

$$aa_1, \ldots, aa_m \qquad \text{(X.2.5.4)}$$

este tot un sistem complet de resturi modulo m.

În adevăr, oricare două elemente diferite din șir sînt necongruente modulo m căci dacă am avea $aa_i = aa_j$ (modulo m), deoarece $_*(a, m) = 1$, rezultă $a_i = a_j$ (mod m), contrar ipotezei.

3°). Dacă:

$$a_1, \ldots, a_{\varphi(m)}$$

este un sistem redus de resturi modulo m și a este un număr întreg prim cu modulul m, atunci șirul:

$$aa_1, \ldots, aa_{\varphi(m)} \qquad \text{(X.2.5.5)}$$

este tot un sistem redus de resturi modulo m.

Demonstrație. Analog ca în demonstrația teoremei precedente, oricare două elemente din șirul (X.2.5.5) sînt necongruente modulo m. Deoarece $_*(a, m) = 1$ și $_*(a_i, m) = 1$, $(\forall) i \in \{1, 2, \ldots, \varphi(m)\}$, rezultă $_*(aa_i, m) = 1$. Rezultă deci că șirul (X.2.5.5) formează un sistem redus de resturi modulo m.

Putem enunța acum teorema lui *Euler*:

dacă $_*(a, m) = 1$, atunci:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}. \qquad \text{(X.2.5.6)}$$

Demonstrație. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$ un sistem redus de resturi modulo m.

În consecință, potrivit propoziției 1°):

$$\begin{aligned} aa_1 &\equiv a_{i_1} \pmod m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ aa_{\varphi(m)} &\equiv a_{i_{\varphi(m)}} \pmod m \end{aligned} \qquad \text{(X.2.5.7)}$$

unde $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{\varphi(m)}})$ este o permutare a sistemului $(a_1, \ldots, a_{\varphi(m)})$. Înmulțind aceste congruențe, obținem:

$$a^{\varphi(m)} a_1 a_2 \ldots a_{\varphi(m)} \equiv a_1 a_2 \ldots a_{\varphi(m)} \pmod m$$

și deoarece $*(a_i, m) = 1$, $(\forall) i \in \{1, 2, \ldots, \varphi(m)\}$, rezultă $*(a_1 a_2 \ldots a_{\varphi(m)}, m) = 1$ deci:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$$

și teorema este demonstrată.

Dacă m este număr prim, $m = p$, deoarece $\varphi(p) = p - 1$, regăsim teorema lui *Fermat:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p \qquad \text{(X.2.5.8)}$$

cu $*(a, p) = 1$.

Numerele compuse n pentru care $a^{n-1} \equiv 1 \pmod n$ se numesc numere *pseudoprime absolute*. S-a emis ipoteza, nedemonstrată pînă astăzi, că există o infinitate de astfel de numere.

4°). Numărul întreg n prim cu m se numește *rest pătratic* modulo m, dacă pentru congruența:

$$x^2 \equiv n \pmod m \qquad \text{(X.2.5.9)}$$

există soluții (există $x \in Z$ care să o verifice) și *nonrest pătratic* modulo m, dacă această ecuație nu are soluții.

Are loc următoarea propoziție importantă:

fie $p > 2$ un număr prim. Atunci, într-un sistem redus de resturi modulo p, există $\frac{p-1}{2}$ resturi pătratice și $\frac{p-1}{2}$ nonresturi pătratice.

Demonstrație. Numerele:

$$1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

sînt prime cu p și necongruente între ele modulo p.

În adevăr, dacă presupunem $i^2 \equiv j^2 \pmod{p}$, unde $1 \leqslant i < j \leqslant \frac{p-1}{2}$, rezultă $i^2 - j^2 \equiv 0 \pmod{p}$ și deci $p \mid (i+j)(i-j)$, adică sau $p \mid (i+j)$ sau $p \mid (i-j)$. Dar nici una dintre aceste afirmații nu este adevărată pe motivul că $1 < i+j < p-1$ și $1 \leqslant j-i < p-1$. Fie apoi n un rest pătratic modulo p oarecare. Deci congruența $x^2 \equiv n \pmod{p}$ are soluții. Există atunci un număr i din șirul $1, 2, \ldots, p-1$, astfel ca $i^2 \equiv n \pmod{p}$. Dacă $\frac{p}{2} < i \leqslant p-1$ atunci și numărul $p-i$, unde $1 \leqslant p-i < \frac{p}{2}$ satisface congruenței: $(p-i)^2 \equiv n$ (modulo p). Deci, dacă n este rest pătratic, atunci n este congruent cu unul din numerele $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Rezultă că există exact $\frac{p-1}{2}$ resturi pătratice într-un sistem redus de resturi modulo p și deci, celelalte $\frac{p-1}{2}$ numere din sistem vor fi nonresturi pătratice, ceea ce trebuia dealtfel demonstrat.

5°). Definim simbolul lui *Legendre* $\left(\frac{n}{p}\right)$ cu $p > 3$ număr prim și $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ prin:

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } n \text{ este rest pătratic modulo } p, \\ -1 \text{ dacă } n \text{ este nonrest pătratic modulo } p. \end{cases}$$

Are loc:

criteriul lui *Gauss*:

$$\left(\frac{n}{p}\right) \equiv n^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}. \qquad \text{(X.2.5.10)}$$

Demonstrație. Fie $\left(\frac{n}{p}\right) = 1$ adică n este rest pătratic modulo p. Ca atare, congruența $x^2 \equiv n \pmod{p}$ are soluții. Dacă x_0 este una din aceste soluții, $x_0^2 \equiv n \pmod{p}$, ridicînd relația scrisă anterior la puterea $\frac{p-1}{2}$, găsim $1 \equiv n^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Așadar, congruența $y^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ are ca soluții toate resturile pătratice modulo p care sînt în număr de $\frac{p-1}{2}$. Reformulînd teorema lui *Lagrange*, în sensul că orice congruență modulo p:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \equiv 0 \pmod{p}$$

cu p prim și $a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$ admite cel mult atîtea soluții cît arată gradul ei (în cazul nostru, n) deci congruența:

$$y^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

nu poate avea mai mult de $\frac{p-1}{2}$ soluții, conchidem că nonresturile pătratice nu satisfac acestei congruențe. Ca atare, dacă $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$ adică n este nonrest pătratic modulo p, rezultă $n^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1 \pmod{p}$, adică $p \nmid (n^{\frac{p-1}{2}} - 1)$. Dar, conform teoremei lui *Fermat*, $p \mid n^{p-1} - 1$, adică $p \mid (n^{\frac{p-1}{2}} + 1)(n^{\frac{p-1}{2}} - 1)$ deci avînd în vedere faptul stabilit anterior, $p \mid n^{\frac{p-1}{2}} + 1$ adică $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ ceea ce demonstrează complet teorema.

X.2.R.1. Să se arate că $\overline{abcd} + \overline{bcda} + \overline{cdab} + \overline{dabc} = \mathfrak{M}1111$.

Soluție. Evident:

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d;$$

$$\overline{bcda} = 1000b + 100c + 10d + a,$$

etc. Adunînd, găsim:

$$\overline{abcd} + \overline{bcda} + \overline{cdab} + \overline{dabc} = 1111(a + b + c + d)$$

ceea ce dovedește afirmația.

X.2.R.2. Să se arate că:

$$\frac{(3n)!}{(n!)^3} \in N.$$

Soluție. Este clar că:

$$\frac{(3n)!}{(n!)^3} = \frac{(3n)!}{n!\,(n!)^2} = C_{2n}^{n} C_{3n}^{n} \in N.$$

X.2.R.3. Să se arate că dacă numărul de n cifre $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$ este divizibil cu $10^n - 1$ atunci și numerele $\overline{a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n a_1}$, $\overline{a_3 \dots a_{n-1} a_n a_1 a_2}$, ..., $\overline{a_{n-1} a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-2}}$, $\overline{a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}}$ sînt divizibile cu $10^n - 1$.

(Nicolae Soare, G.M.B, 8967)

Soluție. Fie:

$$M = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + a_3 \cdot 10^{n-3} + \dots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n = \mathfrak{M}(10^n - 1);$$

$$M_1 = a_2 \cdot 10^{n-1} + a_3 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 10^2 + a_n \cdot 10 + a_1 =$$
$$= 10(a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n) + a_1 =$$
$$= 10(M - a_1 \cdot 10^{n-1}) + a_1 = 10M - a_1(10^n - 1).$$

Cum $M = \mathfrak{M}(10^n - 1)$ rezultă că $M_1 = \mathfrak{M}(10^n - 1)$.

Numerele $\overline{a_3 \ldots a_{n-1}a_n a_1 a_2}, \ldots$ se deduc respectiv din precedentul în mod analog deci fiecare dintre ele se divide cu $10^n - 1$.

X.2.R.4. Dovediți că:

$$3^{1966} + 5^{1966} - 34 \vdots 1966.$$

Soluție. Se observă că numărul $K = 3^{1966} + 5^{1966} - 34$ se divide cu 2 deci mai trebuie arătat că el se divide cu 983 ($1966 = 2 \cdot 983$). Dar 983 este număr prim și, potrivit teoremei lui *Fermat:*

$$9^{983} - 9 \vdots 983,$$
$$25^{983} - 25 \vdots 983$$

deci:

$$K = 9^{983} + 25^{983} - 34 = (9^{983} - 9) + (25^{983} - 25) \vdots 983.$$

X.2.R.5. Dovediți că dacă $p \neq 2$ este un număr prim iar a, $k \in Z$ atunci expresia:

$$E = a^{2p} + (a + 2k)^{2p} - 2(a^2 + 2ak + 2k^2)$$

se divide cu $2p$.

Soluție. Evident:

$$a^{2p} + (a + 2k)^{2p} = (a^2)^p + (a^2 + 4ak + 4k^2)^p \vdots$$
$$\vdots (a^2 + a^2 + 4ak + 4k^2)$$

și rezultă $E \vdots 2$ (deoarece dacă n este impar:

$$a^n + b^n \vdots (a + b)$$

iar în cazul acesta p, fiind număr prim și diferit de 2, este impar).

Rămîne să arătăm că $E = \mathfrak{M}p$. Dar:

$$E = (a^2)^p + [(a + 2k)^2]^p - a^2 - (a^2 + 4ka + 4k^2) =$$
$$= [(a^2)^p - a^2] + \{[(a + 2k)^2]^p - (a + 2k)^2\}$$

și cum, potrivit teoremei lui *Fermat*:

$$(a^2)^p - a^2 \vdots p$$
$$[(a + 2k)^2]^p - (a + 2k)^2 \vdots p$$

rezultă afirmația.

X.2.R.6. Să se demonstreze că pentru orice număr prim $p > 17$, expresia:

$$p^{32} - 1$$

se divide cu 16320.

(Ioan Tomescu, G.M.B, 8258)

Soluție. Evident:

$$16320 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17.$$

Numărul prim p este de forma $p = 2m + 1$ (cu m natural). Deci:

$$p^{32} - 1 = (2m + 1)^{32} - 1 = (2m)^{32} + \ldots + \binom{32}{5} \cdot$$
$$\cdot (2m)^5 + \binom{32}{4} \cdot (2m)^4 + \binom{32}{3} \cdot (2m)^3 + \binom{32}{2} \cdot$$
$$\cdot (2m)^2 + \binom{32}{1} \cdot 2m + 1 - 1.$$

Deoarece $\binom{32}{5}$ se divide cu 2, $\binom{32}{4}$ se divide cu 2^2, $\binom{32}{3}$ se divide cu 2^3, $\binom{32}{2}$ se divide cu 2^4, $\binom{32}{1} = 32 = 2^5$ rezultă că ultimii termeni se divid cu 2^6, deci toată suma se divide cu 2^6 deci $p^{32} - 1$ se divide cu 2^6.

Pe de altă parte, $p^{ab} - 1$ se divide și cu $p^a - 1$ și cu $p^b - 1$, scriind $p^{ab} - 1 = (p^b)^a - 1 = (p^a)^b - 1$ și notînd, de exemplu, $p^a = x$, conform formulei:

$$x^b - 1 \vdots (x - 1).$$

Cum $32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$ rezultă că $p^{32} - 1$ se divide cu $p^{3-1} - 1$, cu $p^{17-1} - 1$, cu $p^{5-1} - 1$. Dar, conform teoremei lui *Fermat*, $a^{q-1} - 1$ se divide cu q, dacă acesta este număr prim și $_*(a, q) = 1$. Deoarece am presupus $p > 17$, obținem că $p^2 - 1$ se divide cu 3, $p^{16} - 1$ se divide cu 17 și $p^4 - 1$ se divide cu 5.

Deci $p^{32} - 1$ se divide cu $2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 16320$.

X.2.T.1. Suma pătratelor a n numere naturale consecutive se divide cu n dacă:

a°). $n = 6k + 3$ sau $n = 6k + 2$;

b°). $n = 6k + 1$ sau $n = 6k + 5$;

c°). $n = 6k + 4$ sau $n = 6k$, $k \in N \cup \{0\}$.

X.2.T.2. Fie k impar. Expresia $m^k - 1$ se divide prin $m + 1$, $m \in Z$, pentru:

a°). 4 valori ale lui m;

b°). 3 valori ale lui m;

c°). cel puțin cinci valori ale lui m.

X.2.T.3. Numărul:

$$2^{2^{1977}} + 27$$

este:

a°). prim;

b°). compus.

X.2.T.4. Fie $n \in N$, $n > 1$. Dacă $2n + 3$ și $4n + 7$ sînt numere prime atunci $2n + 1$ este:

a°). prim;

b°). compus.

X.2.T.5. Mulțimea numerelor $n \in N$ pentru care $_*(5^n + 1, 39) = 1$ este:

a°). formată din cel mult 10 elemente;

b°). formată numai din numerele 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 42;

c°). infinită.

X.2.T.6. Care din următoarele relații:

a°). $\left[\frac{a}{b}\right]_* + \left[\frac{2a}{b}\right]_* + \ldots + \left[\frac{(b-1)a}{b}\right]_* = \left[\frac{b}{a}\right]_* + \left[\frac{2b}{a}\right]_* + \ldots + \left[\frac{(a-1)b}{a}\right]_* = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$ dacă $_*(a, b) = 1$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $_*(a, i) = 1$, $_*(b, j) = 1$, $i \in \overline{1, b-1}$, $j \in \overline{1, a-1}$.

b°). $\dfrac{{}_*[a, b, c]^2}{{}_*[a, b]\ {}_*[b, c]\ {}_*[c, a]} = \dfrac{{}_*(a, b, c)^2}{{}_*(a, b)\ {}_*(b, c)\ {}_*(c, a)}$,

c°). ${}_*[a, b, c] = \dfrac{abc\ {}_*(a, b, c)}{{}_*(a, b)\ {}_*(b, c)\ {}_*(c, a)}$;

d°). $[x]_* + \left[x + \dfrac{1}{n}\right]_* + \ldots + \left[x + \dfrac{n-1}{n}\right]_* = [nx]_*$,

$(\forall) x \in R^+$, $n \in N$, sînt adevărate?

RĂSPUNSURI

X.2.T.1. b°). **X.2.T.2.** a°). **X.2.T.3.** b°). **X.2.T.4.** b°). **X.2.T.5.** c°). Mulțimea numerelor care satisfac enunțul este:

$$K = \{4k \mid k \in N\}.$$

X.2.T.6. Toate relațiile sînt adevărate. În adevăr: a°). Din teorema împărțirii:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 \quad \text{cu } 0 \leqslant r_1 < b, \\ 2a &= bq_2 + r_2 \quad \text{cu } 0 \leqslant r_2 < b, \\ 3a &= bq_3 + r_3 \quad \text{cu } 0 \leqslant r_3 < b, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (b-1)\,a &= bq_{b-1} + r_{b-1} \quad \text{cu } 0 \leqslant r_{b-1} < b; \end{aligned}$$

deoarece ${}_*(a, b) = 1$ rezultă că $r_i \neq r_j$ pentru $i \neq j$ și $r_i \neq 0$.

Deci resturile $r_1, r_2, \ldots, r_{b-1}$ sînt, într-o anumită ordine, $1, 2, \ldots, b-1$.

Adunînd membru cu membru egalitățile prececente și ținînd seama că $q_i = \left[\dfrac{ia}{b}\right]_*$, găsim:

$$\frac{1}{2}(b-1)\,ba = b(q_1 + \ldots + q_{b-1}) + \frac{1}{2}\,b(b-1),$$

sau:

$$\frac{1}{2}(b-1)(a-1) = q_1 + q_2 + \ldots + q_{b-1} =$$

$$= \left[\frac{a}{b}\right]_* + \left[\frac{2a}{b}\right]_* + \ldots + \left[\frac{a(b-1)}{b}\right]_*.$$

Schimbînd rolurile lui a şi b, rezultă şi cealaltă parte a egalităţii.

b°), c°). Vom demonstra numai c°), cealaltă fiind analoagă. Din:

$$_*[a, b] = \frac{ab}{*(a, b)}$$

şi formula de distributivitate:

$$*(_*[a, b], c) = _*[*(a, c), *(b, c)]$$

rezultă:

$$_*[a, b, c] = _*[_*[a, b], c] = \frac{*[a, b]\, c}{*(_*[a, b], c)} =$$

$$= \frac{abc}{*(a, b)_*[*(a, c), *(b, c)]} = \frac{abc_*((a, c), *(b, c))}{*(a, b)_*(b, c)_*(c, a)} =$$

$$= \frac{abc_*(a, b, c)}{*(a, b)\,*(b, c)_*(c, a)}.$$

d°). Fie $[x]_* = a$ şi $x = a + \alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$. Există un întreg k astfel încît:

$$\frac{k}{n} \leqslant \alpha < \frac{k+1}{n}.$$

Să scriem partea stîngă a egalităţii sub forma:

$$[x]_* + \left[x + \frac{1}{n}\right]_* + \ldots + \left[x + \frac{n-k-1}{n}\right]_* +$$

$$+ \left[x + \frac{n-k}{n}\right]_* + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]_*.$$

Fiecare termen al acestei sume de la $[x]_*$ pînă la $\left[x + \frac{n-k-1}{n}\right]_*$ este egal cu a. În adevăr, deoarece:

$$a = [x]_* \leqslant x + \frac{n-k-1}{n} = a + \alpha +$$

$$+ \frac{n-k-1}{n} < a + \frac{k+1}{n} + \frac{n-k-1}{n} = a + 1$$

deci:

$$\left[x + \frac{n-k-1}{n}\right]_* = a$$

și cum:

$$a = [x]_* \leqslant \left[x + \frac{i}{n}\right]_* \leqslant \left[x + \frac{n-k-1}{n}\right]_* = a$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n-k-2$, rezultă afirmația.

Suma acestor termeni este $a(n-k)$.

Analog se arată că termenii sumei de la $\left[x + \frac{n-k}{n}\right]_*$ pînă la $\left[x + \frac{n-1}{n}\right]_*$ sînt egali cu $a+1$. Suma acestor k termeni este deci $k(a+1)$.

Suma tuturor termenilor din membrul stîng este:

$$a(n-k) + k(a+1) = an + k.$$

Dar:

$$k \leqslant n\alpha < k + 1;\ k = [n\alpha]_*$$

și:

$$[nx]_* = [n(a+\alpha)]_* = [na + n\alpha]_* = na + [n\alpha]_* = na + k$$

fapt ce dovedește egalitatea din enunț.

X.2.P.1. Să se arate că expresia:

$$(n + k)\,(n - 1)^{2m+1} + k$$

se divide cu n, unde n, k, m sînt numere naturale.

X.2.P.2[3]. Să se găsească un polinom P cu coeficienți întregi astfel încît:

$$P(n) + 5^n \vdots 64\ (\forall)n \in N - \{1, 2\}.$$

X.2.P.3[3]. Să se arate că oricare ar fi n natural, numărul:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}\, 2^{3k}$$

nu se divide cu 5.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

X.2.P.4. Să se arate că dacă $p > 3$ este număr prim, atunci $p^2 - 1$ se divide prin 24.

(Elena Gogoneață, Rev. „514", I, 92)

X.2.P.5[3]. Să se arate că:

$$2^7 + 5^7 \vdots 49$$

$$3^7 + 4^7 \vdots 49$$

fără a efectua ridicările la putere.

X.2.P.6. Se dă numărul $N_1 = 11^{302}$. Să se arate că:

$$N_1 \equiv 2 \pmod 7,$$

$$N_1 \equiv 9 \pmod{17}.$$

X.2.P.7[1]. Să se arate că:

$$2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1 \vdots 273, \quad (\forall)n \in N - \{1, 2\};$$

X.2.P.8. a°). Să se arate că:

$$E(n) = (25n^2 - 10n + 7)6^n - 7 \vdots 125, \ (\forall)n \in N.$$

b°). Să se arate că:

$$1970^{33} - 3 \cdot 1970^{22} + 3 \cdot 1970^{11} - 1 \vdots 1969^3.$$

X.2.P.9. Să se afle restul împărțirii prin 35 a numărului:

$$M = 3^{12n+10} \cdot 10^{6m+3} + 300 \cdot 72^{72p+30}$$

m, n, p fiind numere naturale.

X.2.P.10. Dovediți că:

a°). $3^{30} - 3^{27} - 3^3 + 1 \vdots 676$;

b°). $2^{60} - 2^{56} - 2^4 + 1 \vdots 225$;

c°). $5^{10} - 5^8 - 5^2 + 1 \vdots 576$.

SOLUȚII

X.2.P.1. Potrivit dezvoltării binomului după *Newton:*

$$(n-1)^{2^m+1} = n^{2^m+1} C^0_{2^m+1} - n^{2^m} C^1_{2^m+1} + \ldots + nC^{2^m}_{2^m+1} - C^{2^m+1}_{2^m+1} = \mathfrak{M}\, n - 1.$$

De aici:

$$E = (n+k)(n-1)^{2^m+1} + k = (n+k)(\mathfrak{M}\, n - 1) + k = \mathfrak{M}\, n$$

ceea ce dovedește afirmația.

X.2.P.2³. Potrivit dezvoltării binomului după *Newton*:

$$5^n = (4+1)^n = 4^n \cdot C^0_n + 4^{n-1} \cdot C^1_n + \ldots + 4^3 \cdot C^{n-3}_n + 4^2 \cdot C^{n-2}_n + 4 \cdot C^{n-1}_n + C^n_n.$$

Pentru $n \geqslant 3$:

$$5^n = \mathfrak{M}\, 4^3 + \frac{n(n-1)}{2}\, 4^2 + 4n + 1 = 8n^2 + 4n + 1 + \mathfrak{M}\, 64.$$

Deci putem lua:

$$P(x) = -8x^2 - 4x - 1$$

care satisface enunțul.

X.2.P.3³. Succesiv:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{3k} \cdot C_{2n+1}^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 8^k \cdot C_{2n+1}^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (5+3)^k C_{2n+1}^{2k+1} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{n} 3^k \cdot C_{2n+1}^{2k+1} \pmod 5.$$

Avem, după *Newton:*

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1} = 1 + 3^{\frac{1}{2}} \cdot C_{2n+1}^1 + 3^{\frac{2}{2}} \cdot C_{2n+1}^2 + \ldots + 3^{\frac{2n+1}{2}} \cdot C_{2n+1}^{2n+1},$$

$$(1-\sqrt{3})^{2n+1} = 1 - 3^{\frac{1}{2}} \cdot C_{2n+1}^1 + 3^{\frac{2}{2}} \cdot C_{2n+1}^2 - \ldots - 3^{\frac{2n+1}{2}} \cdot C_{2n+1}^{2n+1}$$

sau, scăzînd:

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1} - (1-\sqrt{3})^{2n+1} = 2\sqrt{3}(C_{2n+1}^1 + 3 \cdot C_{2n+1}^3 + \ldots + 3^n \cdot C_{2n+1}^{2n+1})$$

de unde:

$$S_n \overset{\text{mod } 5}{\equiv} \frac{(1+\sqrt{3})^{2n+1} - (1-\sqrt{3})^{2n+1}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(4+2\sqrt{3})^n - \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(4-2\sqrt{3})^n = u_n$$

și încă:

$$u_{n+2} = 8u_{n+1} - 4u_n$$

cu $u_1 = 6$, $u_2 = 44$, $u_3 = 328$ etc.

Se demonstrează prin inducție că:

$u_{12k+1} \equiv 1 \pmod 5$, $u_{12k+2} \equiv 4 \pmod 5$, $u_{12k+3} \equiv$ $\equiv 3 \pmod 5$, $u_{12k+4} \equiv 3 \pmod 5$, $u_{12k+5} \equiv 2 \pmod 5$, $u_{12k+6} \equiv 4 \pmod 5$, $u_{12k+7} \equiv 4 \pmod 5$, $u_{12k+8} \equiv$ $\equiv 1 \pmod 5$, $u_{12k+9} \equiv 2 \pmod 5$, $u_{12k+10} \equiv 2 \pmod 5$, $u_{12k+11} \equiv 3 \pmod 5$, $u_{12k+12} \equiv 1 \pmod 5$, $u_{12k+13} \equiv$ $\equiv 1 \pmod 5$, $u_{12k+14} \equiv 4 \pmod 5$, $k \in N \cup \{0\}$,

ceea ce dovedește că $5 \nmid S_n$, $(\forall) n \in N$.

X.2.P.4. Deoarece $p > 3$ atunci p este de una din formele: $8k + 1, 8k + 3, 8k + 5, 8k + 7, k \in N \cup \{0\}$. În cazul $p = 8k + 1$, $p^2 - 1 = 64k^2 + 16k \vdots 8$. Analog pentru celelalte cazuri, $p^2 - 1 \vdots 8$. Dar p este de una din formele $3k + 1$, $3k + 2$. În ambele cazuri $p^2 - 1 \vdots 3$. Ca atare, $p^2 - 1 \vdots 24$.

X.2.P.5[3]. Vom demonstra o afirmație mai generală anume dacă $x + y = \mathfrak{M}(2k + 1)$, atunci $x^{2k+1} + y^{2k+1} = \mathfrak{M}(2k + 1)^2$. Dar:

$$x^{2k+1} + y^{2k+1} = (x+y)(x^{2k} - x^{2k-1}y + \ldots - xy^{2k-1} + y^{2k}) =$$
$$= (x + y)[x^{2k} + x^{2k-1}y - 2x^{2k-1}y - 2x^{2k-2}y^2 +$$
$$+ 3x^{2k-2}y^2 + 3x^{2k-3}y^3 - \ldots + (2k - 1)x^2y^{2k-2} +$$
$$+ (2k - 1)xy^{2k-1} - 2kxy^{2k-1} - 2ky^{2k} + (2k + 1)y^{2k}] =$$
$$= (x + y)^2[x^{2k-1} - 2x^{2k-2}y + 3x^{2k-3}y^2 - \ldots + (2k - 1) \cdot$$
$$\cdot xy^{2k-2} - 2ky^{2k-1}] + (2k + 1)(x + y)y^{2k}.$$

Dacă $x + y = \mathfrak{M}(2k + 1)$ atunci, din relația precedentă, rezultă clar:

$$x^{2k+1} + y^{2k+1} = \mathfrak{M}(2k + 1)^2.$$

Pentru $k = 3$, $x = 2$, $y = 5$ obținem prima relație din enunț, iar pentru $x = 3$, $y = 4$, a doua.

X.2.P.6. Folosind dezvoltarea binomului după *Newton:*

$$N_1 = (17 \cdot 7 + 2)^{151} \equiv 2^{151} \pmod 7$$

și:

$$2^{151} = 2 \cdot 8^{50} = 2 \cdot (7 + 1)^{50} \equiv 2 \pmod 7$$

deci $N_1 \equiv 2 \pmod 7$.

Analog și a doua relație.

X.2.P.7[1]. Pentru $n = 3$:

$$E_3 = 2^{2^3} + 2^{2^3-1} + 1 = 273 : 273.$$

Fie, în general:

$$E_n = 2^{2^n} + 2^{2^n-1} + 1$$

și să presupunem că pentru un k oarecare, $E_k : 273$.

Evident:

$$E_{k+1} = 2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1 = 2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1 + 2^{2^k} \cdot$$

$$\cdot 2^{2^k-1} - 2^{2^k} \cdot 2^{2^k-1} = 2^{2^k}(2^{2^k} + 2^{2^k-1} + 1) + 1 - 2^{2^k} \cdot$$

$$\cdot 2^{2^k-1} = 2^{2^k}(2^{2^k} + 2^{2^k-1} + 1) + 1 - (2^{2^k-1})^3 =$$

$$= 2^{2^k}(2^{2^k} + 2^{2^k-1} + 1) + (1 - 2^{2^k-1})(1 + 2^{2^k-1} + 2^{2^k}) =$$

$$= (2^{2^k} + 2^{2^k-1} + 1)(1 - 2^{2^k-1} + 2^{2^k}) = E_k(1 - 2^{2^k-1} + 2^{2^k}).$$

Dar $E_k : 273$, potrivit presupunerii făcute, deci $E_{k+1} : 273$ și, potrivit principiului inducției, $E_n : 273$, $(\forall)\ n \in N - \{1, 2\}$.

X.2.P.8. a°). Raționăm prin inducție.

$$E(1) = 22 \cdot 6 - 7 = 125 : 125.$$

Presupunem că, pentru un $k \in N$, $E(k) : 125$.

Apoi:

$$E(k + 1) = [25(k + 1)^2 - 10(k + 1) + 7] \cdot 6^{k+1} - 7 =$$

$$= (25k^2 + 40k + 22) \cdot 6^{k+1} - 7,$$

$$E(k + 1) - E(k) = 125(k + 1)^2 \cdot 6^k$$

deci și:

$$E(k+1) = 125(k+1)^2 \cdot 6^k + E(k) = \mathfrak{M}125.$$

Potrivit principiului inducției matematice, $E(n) \vdots 125$, $(\forall)n \in N$.

b°). Expresia din enunț se scrie sub forma:

$$(1970^{11} - 1)^3$$

și cum:

$$(a^{2t+1} - b^{2t+1}) \vdots (a - b),\ t \in N,$$

rezultă afirmația, căci $(1970^{11} - 1) \vdots 1969$.

X.2.P.9. Reducem, folosind congruența, numerele din expresia lui M la numere mai mici ca 35:

$$300 = 35 \cdot 8 + 20;\ 72 = 35 \cdot 2 + 2.$$

Deci:

$$M \equiv 3^{12n} \cdot 3^{10} \cdot 10^{6m} \cdot 10^3 + 20 \cdot 2^{72p} \cdot 2^{30} \pmod{35}.$$

Stabilim resturile prin împărțirea cu 35 a tuturor puterilor numerelor 2, 3, 10 din enunț:

Numărul	Exponentul	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
2	Restul	2	4	8	16	32	29	23	11	22	9	18	1	...
3		3	9	27	11	33	29	17	16	13	4	12	1	...
10		10	30	20	25	5	15	...	...	...	...	...	...	...

Discuția în legătură cu M este imediată.

X.2.P.10. a°). Evident:

$$3^{30} - 3^{27} - 3^3 + 1 = 3^{27}(3^3 - 1) - (3^3 - 1) = (3^{27} - 1)(3^3 - 1).$$

Cum $676 = 26^2$ și $3^3 - 1 = 26$ mai rămîne să arătăm că $3^{27} - 1 \vdots 26$.

Este clar că $3^{27} - 1 \vdots 2$ deci trebuie arătat încă $3^{27} - 1 \vdots 13$.

Dar:

$$3^{27} - 1 = 3^{3 \cdot 9} - 1 = 27^9 - 1 = (26 + 1)^9 - 1 = \mathfrak{M}\, 26,$$

potrivit dezvoltării binomului după *Newton*, și ca atare afirmația este dovedită.

Analog pentru b°) și c°).

PROBLEME ALESE

X.P.1[1]. Să se arate că dacă $a_1, \ldots, a_k \in N$, atunci:

$$T_k = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)!}{a_1!\, a_2! \ldots a_k!} \in N.$$

X.P.2[2]. Să se calculeze cu cîte zerouri se termină produsele:

a°). $A_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 1977 = 1977!$

b°). $A_2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots N_1 = N_1!$

unde:

$$N_1 = \frac{(5^n - 1)k}{4}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}, \; n \in N.$$

X.P.3[2]. Fie a și b două numere naturale iar $_*(a, b)$ cel mai mare divizor comun al lor. Să se arate că are loc egalitatea:

$$\sum_{k=1}^{b} \left[\frac{ka}{b}\right]_* + \sum_{k=1}^{a} \left[\frac{kb}{a}\right]_* = ab + {}_*(a, b).$$

X.P.4*. Să se arate că pentru orice T, număr natural, există un număr natural n astfel încît 2^n să aibă pe primele poziții, cifrele lui T, în aceeași ordine.

X.P.5. Să se dea exemplu de un pătrat magic format numai din numere prime.

X.P.6. Să se găsească soluțiile numere prime ale ecuației:

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

X.P.7. Să se demonstreze că pentru $x, y \in N$, $x^2 + y$ și $y^2 + x$ nu pot fi simultan pătrate perfecte.

(Concurs, U.R.S.S.)

X.P.8. Să se arate că:

$$10 \nmid C_{2 \cdot 5^k}^{5^k} \quad (\forall)\ k \in N.$$

X.P.9[1]. Să se arate că:

a°). $\prod_{k=1}^{n} \left[\sqrt[2^k]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[2^k]{a - \sqrt{a^2 - 1}} \right] =$

$$= \frac{2\sqrt{a^2 - 1}}{\sqrt[2^n]{a + \sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt[2^n]{a - \sqrt{a^2 - 1}}};$$

b°). $\prod_{k=1}^{n} \left[(a + \sqrt{a^2 - 1})^{2^k} + (a - \sqrt{a^2 - 1})^{2^k} \right] =$

$$= \frac{(a + \sqrt{a^2 - 1})^{2^{n+1}} - (a - \sqrt{a^2 - 1})^{2^{n+1}}}{4a\sqrt{a^2 - 1}}$$

unde $a > 1$.

X.P.10[1]. Să se găsească cel mai mic număr natural n astfel ca numărul:

$$M = \frac{7^n - 1}{29}$$

să fie natural.

X.P.11*. Să se arate că există o infinitate de numere triunghiulare care sînt pătrate perfecte.

X.P.12*. Dacă ecuația lui *Pell*:

$$x^2 - ky^2 = 1, \qquad k \in N,$$

admite o soluție particulară în numere naturale, atunci ea admite o infinitate de astfel de soluții.

X.P.13[3]**.** Să se arate că:

$$\pi(n! + 2n) + \pi(n) \leqslant \pi(n! + n) + \pi(2n)$$

unde $\pi(n)$ reprezintă numărul de numere prime care nu depășesc pe n.

(L. Panaitopol, G.M.A)

X.P.14. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale a, astfel că pentru orice număr natural n, numărul $z = n^4 + a$ nu este prim.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

X.P.15[1]**.** La un turneu șahistic participă n jucători. Se presupune că n este astfel ales în așa fel încît, în fiecare etapă a concursului fiecare jucător să aibă partener. În prima etapă cei care au pierdut părăsesc jocul. În următoarea etapă (într-o etapă fiecare participant joacă o singură dată) cei care au pierdut părăsesc jocul ș.a.m.d.

Care este numărul total de partide jucate?

X.P.16. Să se arate că $(2n)!$ nu se divide la 3^n.

X.P.17. Să se determine toți x pentru care x, $2x+1$, $5x + 2$ sînt simultan numere prime.

X.P.18. Să se arate, fără a folosi descompunerea în factori primi, că numărul 161051 este puterea a 5-a a unui număr natural.

Să se găsească acest număr.

X.P.19. Să se arate că oricare ar fi $n \in N$, numărul $225n - 4$ nu poate fi produsul a două numere întregi consecutive.

X.P.20[3]**.** Cîte soluții întregi pozitive admite ecuația:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n?$$

X.P.21. Să se demonstreze că produsul a opt numere consecutive, întregi și pozitive, nu poate fi pătrat perfect.

(Baraj, 1973)

X.P.22. Dacă p este un număr prim impar, atunci.

$$1^p + 2^p + \ldots + p^p \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

X.P.23. Să se determine x, y, z știind că egalitatea:

$$\sqrt{\overline{\underbrace{xx\ldots x}_{2n\text{ cifre}}} - \overline{\underbrace{yy\ldots y}_{n\text{ cifre}}}} = \overline{\underbrace{zz\ldots z}_{n\text{ cifre}}}$$

are loc pentru cel puțin două valori distincte ale numărului natural n. Să se găsească toate valorile lui n pentru care egalitatea are loc.

X.P.24*. Să se arate că ultimele 5 cifre ale numărului:

$$N = 9^{(9^{\cdot^{\cdot^{(9^{(9^9)})}}})}$$

unde numărul cifrelor de 9 este 20000, sînt 45289.

X.P.25*. *(Lema lui Gauss).* Fie $n_1, n_2, \ldots, n_s$ numere întregi, prime cu p, număr prim. Prin împărțirea numerelor n_i din acest șir la p ,obținem resturile r_i astfel că $n_i \equiv r_i \pmod{p}$ și $0 < r_i \leqslant p-1$.

Șirul $r_1, \ldots, r_s$ se va numi șirul celor mai mici resturi pozitive ale șirului $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Dacă $p > 2$, $*(p, n) = 1$, și m este numărul celor mai mici resturi pozitive ale șirului:

$$1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n, \ldots,$$

mai mari decît $\frac{p}{2}$; atunci $\left(\frac{n}{p}\right) = (-1)^m$ unde $\left(\frac{n}{p}\right)$ este simbolul lui *Legendre.*

X.P.26[3]. Dovediți că:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = -1^{\frac{p^2-1}{8}}; \quad p \text{ fiind prim.}$$

X.P.27[3]. Dacă p și q sînt două numere impare, prime între ele, atunci:

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{kq}{p}\right]_* + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{kp}{q}\right]_* = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}.$$

X.P.28*. *(Legea de reciprocitate a lui Gauss).* Dacă p și q sînt numere prime impare diferite între ele, atunci:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

unde $\left(\frac{p}{q}\right)$ este simbolul lui *Legendre.*

X.P.29[2]. Să se arate că $n!$ nu poate fi pătrat perfect, $(\forall) n \in N - \{1\}$.

X.P.30[1]. Să se arate că $p_n \leqslant 2^n$ oricare ar fi $n \in N$, p_n reprezentînd al n-lea număr prim.

X.P.31. Să se arate că pentru fiecare $m \in N$, există cel puțin trei numere prime cu m cifre fiecare.

X.P.32. Să se arate că pentru orice $n \in N$, numărul $N_n = 5^n p_n$ are cel mult n cifre, p_n reprezentînd al n-lea număr prim.

X.P.33[2]. Să se arate că numărul $[(2+\sqrt{3})^n]_*$ este impar, $(\forall)\ n \in N$.

X.P.34[1]. Să se calculeze:

$$\left[\sum_{k=4}^{10^6} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right]_*.$$

X.P.35[1]. Să se scrie soluțiile în numere întregi ale ecuației:

$$ax + by = c,\ a, b, c \in Z,$$

știind că admite o astfel de soluție (x_0, y_0).

X.P.36*. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(25^n-1)(5a+b)}{24\cdot 5^k}\right]_* = \frac{(25^n-1)(5a+b)-24n(a+b)}{96}$$

unde $n \in N$, $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

X.P.37[2]. Dacă partea zecimală a numărului $(2 + \sqrt{2})^n$ este t atunci $n = \log_{2-\sqrt{2}} (1 - t)$.

X.P.38[3]. Să se calculeze ultimele 99 cifre ale numărului:

$$N_1 = \frac{50^{1000} - 1}{49}.$$

X.P.39[3]. În cîte moduri se poate scrie 2^n ca sumă de patru pătrate ale unor numere naturale?

X.P.40*. Să se arate că pentru orice $n \in N$ şi $p \in N - \{1\}$ are loc egalitatea:

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{p-1} \left[\frac{n + ip^k}{p^{k+1}} \right]_* = n.$$

X.P.41*. Să se arate că şirul:

$$\{2^n - 3\},\ n = 2, 3, \ldots$$

conţine cel puţin o submulţime infinită în care oricare două elemente sînt prime între ele.

(Olimpiada Internaţională de Matematică)

X.P.42*. Fie k un număr natural şi pentru orice număr real x să notăm $[x]_k$ numărul raţional cu proprietatea că:

$$\frac{p}{k} \leqslant x < \frac{p+1}{k};\ p \in Z$$

Să se calculeze:

$$S_k(x) = \left[\frac{x+1}{2k} \right]_k + \left[\frac{x+2}{2^2 k} \right]_k +$$

$$+ \left[\frac{x+2^2}{2^3 k} \right]_k + \ldots + \left[\frac{x+2^s}{2^{s+1} k} \right]_k + \ldots$$

(Dumitru Bătineţu, G.M.B, 10189)

X.P.43*. Considerăm un tabel pătratic:

$$a_{11}a_{12} \dots a_{1n}$$
$$a_{12}a_{22} \dots a_{2n}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_{1n}a_{2n} \dots a_{nn}$$

conținînd n^2 numere întregi nenegative care se bucură de proprietatea următoare:

dacă $a_{ij} = 0$ atunci pentru acest i și j:

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} \geqslant n.$$

Să se arate că suma tuturor elementelor din tabel este mai mare sau egală decît $\frac{n^2}{2}$.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

X.P.44*. Fie $k \in N$, $Q_k = \left\{ x \in Q \mid x = \frac{m}{k} \right\}$ și $f : R \to Q_k$ cu proprietatea că:

$$f(x) \leqslant x < f(x) + \frac{1}{k},$$

oricare ar fi $x \in R$.

Să se arate că pentru orice $x \in R$ avem:

$$f(2x) - f(x) = f\left(x + \frac{1}{2k}\right).$$

(Dumitru Bătinețu, G.M.B, 9938)

X.P.45*. O tablă de șah de 8×8 pătrățele se împarte în p dreptunghiuri astfel încît două dreptunghiuri să nu se intersecteze. Pentru fiecare partiție de acest gen se pun următoarele condiții:

a°). fiecare dreptunghi are tot atîtea pătrățele albe cît și negre:

b°). dacă a_i este numărul pătrățelelor albe în al i-lea dreptunghi, are loc $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_p$.

Să se caute p-ul maximal în care se poate face o astfel de partiție, să se arate care sînt dreptunghiurile și să se aranjeze pe tablă.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

X.P.1[1]. Raționăm prin inducție matematică. Pentru $k = 1$, evident:

$$T_{a_1} = \frac{a_1!}{a_1!} = 1 \in N.$$

Pentru $k = 2$:

$$T_{a_1, a_2} = \frac{(a_1 + a_2)!}{a_1! a_2!} = C_{a_1+a}^{a_1} \in N.$$

Presupunem afirmația valabilă pentru $k - 1$ numere naturale $a_1, \ldots, a_{k-1}$:

$$T_{a_1, \ldots, a_{k-1}} = \frac{(a_1 + \ldots + a_{k-1})!}{a_1! \ldots a_{k-1}!} \in N.$$

Pentru k numere naturale $a_1, \ldots, a_k$:

$$T_{a_1, \ldots, a_k} = \frac{(a_1 + \ldots + a_k)!}{a_1! a_2! \ldots a_{k-1}! a_k!} = \frac{[(a_1 + \ldots + a_{k-1}) + a_k]!}{(a_1 + \ldots + a_{k-1})!\, a_k!} \cdot$$

$$\cdot \frac{(a_1 + \ldots + a_{k-1})!}{a_1! \ldots a_{k-1}!} = T_{a_1 + \ldots + a_{k-1}, a_k} \cdot T_{a_1, \ldots, a_{k-1}} \in N$$

deci și afirmația corespunzătoare lui k este adevărată.

Potrivit principiului inducției matematice, afirmația este valabilă pentru orice $k \in N$.

X.P.2[2]. În reprezentarea lui $n!$ ca produs de factori primi, exponentul lui 2, pentru $n > 5$, este mai mare decît exponentul lui 5. Cum zerourile sînt date de puterea lui 10 și cum $10 = 2 \cdot 5$, cu observația precedentă, deducem că numărul căutat este tocmai exponentul lui 5 din reprezentarea lui $n!$ ca produs de factori primi.

a°). Rezultă deci că exponentul căutat este (vezi X.2.4):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1977}{5^k} \right]_* = 492.$$

b°). Putem scrie numărul N_1 sub forma:

$$N_1 = \frac{(5^n - 1)k}{5 - 1} = k(1 + 5 + \ldots + 5^{n-1}) = \overline{\underbrace{kk \ldots k}_{n \text{ ori}}}_{(5)}$$

și, aplicînd teorema lui *Legendre*, exponentul căutat este:

$$\frac{\frac{(5^n - 1)k}{4} - kn}{4} = \frac{(5^n - 4n - 1)k}{16}$$

care este tocmai numărul de zerouri căutat.

X.P.3². Să presupunem, pentru început, că $_*(a, b) = 1$. Fie r_k restul împărțirii lui ka la b; cum $r_k < b$, vom obține:

$$\left[\frac{ka}{b}\right]_* = \frac{ka - r_k}{b}$$

și, sumînd:

$$\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{ka}{b}\right]_* = \sum_{k=1}^{b}\frac{ka - r_k}{b} = \frac{a}{b}\sum_{k=1}^{b}k - \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b}r_k.$$

Dar $r_i \neq r_j$ pentru $i \neq j$ deoarece atunci cînd k parcurge mulțimea $\{1,\ldots,b\}$, r_k parcurge sistemul complet de resturi $0, \ldots, b - 1$ astfel că egalitatea de mai sus devine:

$$\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{ka}{b}\right]_* = \frac{ab + a - b + 1}{2}.$$

Analog:

$$\sum_{k=1}^{a}\left[\frac{kb}{a}\right]_* = \frac{ab - a + b + 1}{2}.$$

Sumînd cele două relații o obținem pe cea din enunț.

Să presupunem acum $_*(a, b) = d \neq 1$ deci $a = \alpha d$ și $b = \beta d$ unde $_*(\alpha, \beta) = 1$. Vom obține:

$$\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{ka}{b}\right]_* + \sum_{k=1}^{a}\left[\frac{kb}{a}\right]_* = \sum_{k=1}^{\beta d}\left[\frac{k\alpha}{\beta}\right]_* + \sum_{k=1}^{\alpha d}\left[\frac{k\beta}{\alpha}\right]_* =$$

$$= \sum_{i=0}^{d-1}\left(\sum_{k=i\beta+1}^{(i+1)}\left[\frac{k\alpha}{\beta}\right]_* + \sum_{k=i\alpha+1}^{(i+1)\alpha}\left[\frac{k\beta}{\alpha}\right]_*\right).$$

Pe de altă parte:

$$\sum_{k=i\beta+1}^{(i+1)\beta}\left[\frac{k\alpha}{\beta}\right]_* + \sum_{k=i\alpha+1}^{(i+1)\alpha}\left[\frac{k\beta}{\alpha}\right]_* = 2i\alpha\beta + \sum_{k=1}^{\beta}\left[\frac{k\alpha}{\beta}\right]_* + \sum_{k=1}^{\alpha}\left[\frac{k\beta}{\alpha}\right]_*.$$

Ca atare, ținînd seama de cele arătate în prima fază a demonstrației:

$$\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{ka}{b}\right]_* + \sum_{k=1}^{a}\left[\frac{kb}{a}\right]_* = 2\alpha\beta\sum_{i=1}^{d-1} i +$$

$$+ d\left(\sum_{k=1}^{\beta}\left[\frac{k\alpha}{\beta}\right]_* + \sum_{k=1}^{\alpha}\left[\frac{k\beta}{\alpha}\right]_*\right) = \alpha\beta d(d-1) + d(\alpha\beta + 1) =$$

$$= d^2\alpha\beta + d = {}_*(a, b) + ab$$

ceea ce sfîrșește demonstrația.

X.P.4*. Așadar, va trebui să demonstrăm că există n și k astfel încît:

$$10^k T \leqslant 2^n < 10^k < (T + 1)$$

sau, altfel scris:

$$\lg T + k \leqslant n \lg 2 < \lg (T + 1) + k.$$

Înfășurăm axa reală pe un cerc de rază $\frac{1}{2\pi}$. Lungimea acestui cerc fiind 1, rezultă deci că numerele $\lg T + k$, atunci cînd k parcurge mulțimea numerelor naturale, iar T este fix, vor fi reprezentate cu ajutorul aceluiași punct (deci și numerele naturale se vor bucura de aceeași proprietate) și, analog, și numerele $\lg(T + 1) + k$. În privința numerelor $\lg 2, 2\lg 2, \ldots n\lg 2,$

..., oricare două dintre ele au o reprezentare distinctă pe cerc, deoarece, dacă, de exemplu, $a \lg 2$ și $b \lg 2$ ar admite, aceeași reprezentare, distanța $(a - b)\lg 2$ dintre ele ar fi întreg, fie acesta u, deci am avea:

$$\lg 2 = \frac{u}{a - b}$$

adică $\lg 2$ ar fi un număr rațional, absurd. Ca atare, șirul de puncte generat de numerele:

$$\lg 2,\ 2 \lg 2, \ldots,\ n \lg 2, \ldots$$

formează un șir infinit:

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots \qquad (1)$$

Pentru a demonstra enunțul, trebuie să arătăm că unele puncte din șirul (1), cu indici suficienți de mari (astfel încît puterea respectivă a lui 2 să aibă mai multe cifre decît T) vor fi cuprinse în intervalul tăiat pe cerc de punctele $\lg T$, $\lg(T + 1)$.

Întrucît pe cerc au fost dispuse o infinitate de puncte din șirul nostru, rezultă că printre ele se pot găsi două puncte a căror distanță (adică lungimea arcului de cerc ale cărui extremități sînt aceste puncte) să fie mai mică decît orice număr dat-dacă distanța dintre oricare două puncte ale șirului ar fi mai mare decît un număr dat α, atunci pe cerc nu s-ar afla decît un număr finit de puncte al șirului. Fie A_p și A_{p+q} două puncte din șirul considerat, a căror distanță este mai mică decît lungimea intervalului tăiat pe cerc (egală cu $\lg\left(1 + \frac{1}{T}\right)$). Să observăm că distanța dintre punctele A_p și A_{p+q} este egală cu distanța dintre punctele A_{p+q} și A_{p+2q}, A_{p+3q} și A_{p+2q}, ... deoarece:

$$(q + kq) \lg 2 - [p + (k - 1)q] \lg 2 = q \lg 2.$$

Ca atare, punctele $A_p, A_{p+q}, A_{p+2q}, \ldots$ sînt, pe cerc, unul după altul, situate la aceeași distanță. Dar, deoarece distanța dintre aceste puncte vecine este mai mică

decît lungimea intervalului considerat, tăiat pe cerc, atunci din oricare puncte considerate, în care k este un număr natural suficient de mare astfel ca produsul dintre k şi distanţa dintre punctele A_p şi A_{p+q} să fie mai mare decît 1, cel puţin unul dintre ele trebuie să fie cuprins în intervalul tăiat pe cerc. În felul acesta, prevalîndu-se de un tip de raţionament mai puţin întîlnit dar foarte eficace, problema a fost soluţionată.

X.P.5. Vom da două exemple de astfel de pătrate:

569	59	449
239	359	479
269	659	149

17	317	397	67
307	157	107	227
127	277	257	137
347	47	37	367

X.P.6. Cum $x^2 = 2y^2 + 1$ rezultă că x este impar, fie deci $x = 2k + 1$, $k \in N$. În felul acesta:

$$x^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

deci:

$$y^2 = 2k(k + 1)$$

şi, ca atare, y este par. Cum y este prim şi par urmează $y = 2$ deci $x = 3$.

X.P.7. Admitem, prin absurd, că $x^2 + y$ şi $y^2 + x$ sînt simultan pătrate perfecte, pentru $x, y \in N$. Cum după x^2 urmează pătratul perfect $(x + 1)^2$, şi analog, după y^2 rămîne că urmează $(y + 1)^2$, deci:

$$x^2 + y \geqslant (x + 1)^2$$

$$y^2 + x \geqslant (y + 1)^2$$

adică:

$$y \geqslant 2x + 1$$
$$x \geqslant 2y + 1$$

de unde, adunînd aceste relații:

$$x + y + 2 < 0,$$

absurd. Ca atare, presupunerea făcută nu poate fi acceptată deci $x^2 + y$ și $y^2 + x$ nu pot fi simultan pătrate perfecte.

X.P.8. Evident:

$$C_{2\cdot 5^k}^{5^k} = \frac{(2 \cdot 5^k)!}{(5^k!)^2}.$$

Folosind teorema lui *Legendre:*

$$2 \cdot 5^k = \underbrace{\overline{200\ldots0}}_{(k+1)\text{ cifre}}{}_{(5)},$$

$$5^k = \underbrace{\overline{100\ldots0}}_{(k+1)\text{ cifre}}{}_{(5)}.$$

Exponentul lui 5 în produsul $(2 \cdot 5^k)!$ este:

$$S_{2\cdot 5^k} = \frac{2 \cdot 5^k - 2}{4} = \frac{5^k - 1}{2}$$

iar în produsul $[(5^k)!]^2$ este:

$$S_{5^k} = \frac{5^k - 1}{2}$$

deci $C_{2\cdot 5^k}^{5^k}$ se termină cu $\frac{5^k - 1}{2} - \frac{5^k - 1}{2} = 0$ zerouri,

ceea ce dovedește enunțul.

X.P.9[1]**.** a°). Notăm:

$$u_n = \sqrt[2^n]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[2^n]{a - \sqrt{a^2 - 1}}$$

și se observă imediat că:

$$u_n^2 = u_{n-1} + 2.$$

Convenim să notăm:

$$x = a + \sqrt{a^2 - 1}.$$

deci:

$$\frac{1}{x} = a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

Ca atare:

$$u_1 = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$u_2^2 = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{1}{2}} + 2 = \left(x^{\frac{1}{2^2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2^2}}} \right)^2$$

de unde, u_n fiind număr pozitiv:

$$u_2 = x^{\frac{1}{2^2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2^2}}}$$

și, în general:

$$u_n = x^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2^n}}}$$

lucru ce se poate deduce prin inducție.

Considerăm acum șirul $\{v_n\}_{n \in N}$ definit de relația de recurență:

$$v_n u_n = v_{n-1}, \; n = 2, 3, \ldots,$$

cu:

$$v_1 = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Presupunem:

$$v_{n-1} = x^{\frac{1}{2^{n-1}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2^{n-1}}}}$$

și rezultă:

$$v_n = \frac{x^{\frac{1}{2^{n-1}}} - 1 : x^{\frac{1}{2^{n-1}}}}{x^{\frac{1}{2^n}} + 1 : x^{\frac{1}{2^n}}} = x^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2^n}}}.$$

Din relația:

$$u_n v_n = v_{n-1}$$

deducem:

$$u_2 = \frac{v_1}{v_2}$$

$$u_3 = \frac{v_2}{v_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = \frac{v_{n-1}}{v_n}$$

și, prin înmulțire:

$$u_2 u_3 \ldots u_n = \frac{v_1}{v_n}.$$

Adică, în cazul studiat de noi:

$$u_1 u_2 \ldots u_n = \prod_{k=1}^{n} \left[\sqrt[2^k]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt[2^k]{a - \sqrt{a^2 - 1}} \right] = \frac{v_1 u_1}{v_n} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - 1}}\right)}{\sqrt[2^n]{a + \sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt[2^n]{a - \sqrt{a^2 - 1}}} \cdot$$

$$\cdot \left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a - \sqrt{a^2 - 1}}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{a^2 - 1}}{\sqrt[2^n]{a + \sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt[2^n]{a - \sqrt{a^2 - 1}}}.$$

b°). Analog, notăm:

$$u_n = (a + \sqrt{a^2 - 1})^{2^n} + (a - \sqrt{a^2 - 1})^{2^n} =$$

$$= x^{2^n} + \frac{1}{x^{2^n}}$$

unde $x = a + \sqrt{a^2 - 1}$ deci:

$$u_{n-1}^2 = u_n + 2.$$

Fie:

$$V_n = (a + \sqrt{a^2 - 1})^{2^n} - (a - \sqrt{a^2 - 1})^{2^n} =$$

$$= x^{2^n} - \frac{1}{x^{2^n}}$$

deci:

$$V_1 = 4a\sqrt{a^2 - 1}.$$

Dar:

$$u_n V_n = V_{n+1}$$

astfel că:

$$u_1 \dots u_n = \frac{V_{n+1}}{V_1} = \prod_{k=1}^{n} [(a + \sqrt{a^2 - 1})^{2^k} +$$

$$+ (a - \sqrt{a^2 - 1})^{2^k}] =$$

$$= \frac{(a + \sqrt{a^2 - 1})^{2^{n+1}} - (a - \sqrt{a^2 - 1})^{2^{n+1}}}{4a\sqrt{a^2 - 1}}.$$

X.P.10[1]. Potrivit teoremei lui *Fermat*:

$$7^{29} - 7 \vdots 29$$

astfel că $n = 28$ ar putea fi numărul căutat. Fie m cel mai mic număr întreg pozitiv pentru care:

$$\frac{7^m - 1}{29} \in N.$$

Deci:

$$7^{28} - 1 = 29k_1, \quad k_1 \in N,$$

$$7^m - 1 = 29k_2, \quad k_2 \in N, \quad m \leqslant 28, \quad m \in N.$$

Ca atare:

$$7^{28} - 1 - (7^m - 1) = 7^m (7^{28-m} - 1) = 29 (k_1 - k_2)$$

deci:

$$7^{28-m} - 1 \vdots 29$$

deci $28 - m \geqslant m$, avînd în vedere proprietatea de minimalitate a lui m. Deci $m \leqslant 14$.

Dar:

$$\frac{7^{14} - 1}{29} \in N$$

căci:

$$\frac{7^{14} - 1}{29} = \frac{49^7 - 1}{29} = \frac{(58 - 9)^7 - 1}{29} = k_3 - \frac{9^7 + 1}{27} =$$

$$= k_3 - \frac{9 \cdot 81^3 + 1}{29} = k_3 - \frac{9(87 - 6)^3 + 1}{29} =$$

$$= k_4 + \frac{1943}{29} = k_5$$

unde $k_3, k_4, k_5 \in Z$.

Așadar:

$$7^{14} - 1 = 29k_6$$

$$7^m - 1 = 29k_7,$$

$k_6, k_7 \in N$.

cu $m \leqslant 14$. Procedînd analog, găsim $m \leqslant 7$ și:

$$\frac{7^7 - 1}{29} \in N.$$

(lucru ce se verifică, prin calcule, analog). Pentru $n < 7$ se constată, prin calcul, că:

$$\frac{7^n - 1}{29} \notin N$$

deci $n = 7$ este cel mai mic număr care satisface afirmația din enunț.

X.P.11*. Fie $k \in N$ fixat și să considerăm numerele de forma:

$$\tau_n = \frac{n(n+1)}{k}.$$

Să presupunem că, pentru un anumit n, numărul τ_n este natural și, mai mult decît atît, este un pătrat perfect; fie $\tau_n = q^2$ cu $q \in N$. Vom arăta că numărul $\tau_{4k\tau_n}$ este, de asemenea, un pătrat perfect. În adevăr:

$$\tau_{4k\tau_n} = \frac{4k\tau_n(4k\tau_n + 1)}{k} = 4\tau_n\left[4k\,\frac{n(n+1)}{k} + 1\right] =$$

$$= [2q(2n+1)]^2.$$

Rezultă deci că dacă τ_n este un pătrat perfect, atunci șirul de numere $\{{}_1\tau_p\}_{p\in N}$ definit recursiv prin:

$${}_1\tau_0 = \tau_n;\ {}_1\tau_p = \tau_{4k_1\tau_{p-1}}$$

care este un subșir al șirului $(\tau_n)_{n\in N}$ este format numai din pătrate perfecte. În particular, pentru $k = 2$, șirul $({}_1\tau_n)_{n\in N}$ coincide cu șirul numerelor triunghiulare $(t_n)_{n\in N}$ și cum t_n este număr natural iar $t_1 = 1$ este un pătrat perfect, rezultă aserțiunea din enunț.

Se poate observa echivalența dintre enunțul acestei probleme și al problemei X.1.P.1.

X.P.12*. Continuăm raționamentul făcut în problema precedentă. Dacă pentru un anumit n, $\tau_n = q^2$, $q \in N$, vom obține:

$$\frac{n(n+1)}{k} = q^2$$

adică:

$$(2n + 1)^2 - k(2q)^2 = 1.$$

Urmează că $x_0 = 2n + 1$, $y_0 = 2\sqrt{\tau_n}$ este o soluție particulară a acestei ecuații. Rezultă atunci, din cele demonstrate anterior, că putem genera o infinitate de soluții ale ecuației cu ajutorul șirului $({}_1\tau_p)_{p\in N}$ și anume:

$$x_p = 8k\ {}_1\tau_{p-1} + 1,$$
$$y_p = 2\sqrt{{}_1\tau_p}.$$

X.P.13[3]. Dacă între $n! + n$ și $n! + 2n$ nu există nici un număr prim atunci:

$$\pi(n! + 2n) = \pi(n! + n)$$

și inegalitatea este evidentă.

Dacă, în schimb, există q număr prim astfel ca $n! + n < q < n! + 2n$ unde $n \neq 1$ (pentru $n = 1$ inegalitatea din enunț este banal satisfăcută) și deci $q = n! + p$ cu $n < p < 2n$, atunci, evident, $*(p, n) = 1$ și p este prim căci dacă n-ar fi prim, el ar admite un divizor prim mai mic decît $\sqrt{2n}$ care, evident, este mai mic decît n și am avea $*(p, n!) \neq 1$, absurd. Așadar, pentru orice număr prim q cuprins între $n! + n$ și $n! + 2n$ există un număr prim p cuprins între n și $2n$.

Prin urmare:

$$\pi(n! + 2n) - \pi(n! + n) \leqslant \pi(2n) - \pi(n)$$

adică o formă a inegalității din enunț.

X.P.14. Pornim de la identitatea:

$$x^4 + a = \left(n^2 + \sqrt{a} + n\sqrt{2\sqrt{a}}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(n^2 + \sqrt{a} - n\sqrt{2\sqrt{a}}\right)$$

și pentru $a = \dfrac{k^4}{4}$ fiecare paranteză este un număr întreg, în care $k = 2m$, $m \in N$, astfel ca a să fie întreg.

Dar, în acest caz:

$$z = (n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn)$$

și:

$$n^2 + 2m^2 + 2mn \geqslant 5, \quad n^2 + 2m^2 - 2mn \geqslant$$

$$\geqslant (n - m)^2 + m^2 \geqslant m^2 \geqslant 4$$

pentru $m \geqslant 2$ astfel că cei doi factori sînt mai mari decît 1; z nu este deci număr prim.

Se obțin deci numerele:

$$8^2, 32^2, \ldots, (2m^2)^2, \ldots$$

X.P.15[1]. *Soluția I.* Pentru ca un astfel de turneu să fie posibil este necesar ca n să fie o putere a lui 2, $n = 2^k$.

În adevăr, dacă la un anumit nivel (etapă) numărul de jucători ar fi impar, unul nu ar avea partener.

În prima etapă s-au jucat $2^k : 2$ partide. În a doua $2^{k-1} : 2$ jocuri, etc. În ultima etapă s-a jucat o singură partidă.

Deci numărul total de partide jucate este:

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1 = n - 1.$$

Soluția a II-a. În competiție numărul de victorii este egal cu numărul de înfrîngeri și cu numărul de partide jucate. Dar numărul de înfrîngeri este $n - 1$.

X.P.16. Cum exponentul lui 3 în reprezentarea lui $(2n)!$ ca produs de factori primi este (vezi X.2.4):

$$S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2n}{3^k}\right]_*$$

și cum $[x]_* \leqslant x$, rezultă:

$$S_3 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2n}{3^k} = n$$

ceea ce sfîrșește demonstrația.

X.P.17. Dacă $x = 6k + 1$, $k \in N$, atunci $2x + 1 = \mathfrak{M}\ 3$ nu este număr prim.

Dacă $x = 6k + 5$, atunci $5x + 2 = \mathfrak{M}\ 3$ nu este număr prim.

Cazurile $x = 6k$, $x = 6k + 2$, $x = 6k + 4$ nu convin, x fiind în fiecare din cazuri număr compus. Dacă $x = 2$ (1 nu este considerat număr prim, potrivit convenției făcute la începutul acestui capitol), $5x + 2 = 12$ este compus.

Cînd $x = 3$, obținem $2x + 1 = 7$, $5x + 2 = 17$, numere prime, deci $x = 3$ convine.

X.P.18. Din identitatea:

$$(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1,$$

pentru $x = 10$:

$$11^5 = 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 +$$
$$+ 5 \cdot 10 + 1 = 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 10^3 +$$
$$+ 5 \cdot 10 + 1 = 161051$$

ceea ce dovedește enunțul.

X.P.19. Presupunem contrariul, adică există $k \in Z$ astfel încît:

$$k(k + 1) = 225n - 4.$$

Rezolvînd ecuația de gradul al II-lea în raport cu k, găsim:

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{15(4 \cdot 15n - 1)}}{2}.$$

Ori, $\sqrt{15(4 \cdot 15n - 1)} \notin Z$ căci $*(15, 4 \cdot 15n + 1) = 1$ și 15 nu este pătrat perfect.

În concluzie, potrivit principiului reducerii la absurd, afirmația din enunț este dovedită.

X.P.20[3]. Să observăm că numărul soluțiilor în numere întregi pozitive ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n \qquad (1)$$

este egal cu diferența dintre numărul soluțiilor în numere întregi pozitive ale inegalității:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n \qquad (2)$$

și numărul soluțiilor în numere întregi pozitive ale inegalității:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n - 1. \qquad (3)$$

Este evident că, dacă:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n$$

atunci:

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \ldots + (x_m - 1) \leqslant n - m$$

de unde rezultă că numărul soluțiilor în numere întregi pozitive ale inegalității:

$$x_1 + \ldots + x_m \leqslant n$$

este egal cu numărul soluțiilor întregi nenegative ale inegalității:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m \leqslant n - m.$$

Ca atare, rezolvarea problemei se reduce la determinarea numărului $N(n, m)$ de soluții în numere întregi nenegative ale inegalității de mai sus.

Să observăm că dacă:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n,$$

unde x_1, x_2, ..., x_m sînt numere întregi nenegative, numărul cel mai mare, t_m, din următorul șir crescător de numere pozitive:

$$t_1 = x_1 + 1,$$
$$t_2 = x_1 + x_2 + 2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_m = x_1 + x_2 + \ldots + x_m + m$$

nu este mai mare decît $m + n$.

Pe de altă parte, dacă avem m numere întregi pozitive diferite $t_1, t_2, \ldots, t_m$, care nu sînt mai mari decît $n + m$, putem să construim cu ajutorul acestor numere soluția $x_1, x_2, \ldots, x_m$ în numere întregi nenegative a inegalității (2); pentru aceasta, este suficient să considerăm că numerele $t_1, t_2, \ldots, t_m$ sînt scrise în ordine crescătoare și să punem:

$$x_1 = t_1 - 1,\ x_2 = t_2 - t_1 - 1,\ x_3 = t_3 - t_2 - 1,\ \ldots,\ x_m = t_m - t_{m-1} - 1.$$

Acest raționament arată că numărul $N(n, m)$ de soluții nenegative ale inegalității (2) este egal cu numărul de moduri în care pot fi alese m numere oarecare din $m + n$ numere, 1, 2, ..., $n + m$, adică este egal cu C^m_{n+m}.

Potrivit celor spuse mai sus, numărul soluțiilor în numere întregi pozitive ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

este egal cu:

$$N(n - m, m) - N(n - 1 - m, m) = C^m_n - C^m_{n-1} = C^{m-1}_{n-1}$$

și numărul soluțiilor în numere nenegative ale acestei ecuații este egal cu:

$$N(n, m) - N(n - 1, m) = C^m_{n+m} - C^m_{n+m-1} = C^{m-1}_{n+m-1}.$$

X.P.21. Fie:

$$n, n + 1, \ldots, n + 7$$

cele opt numere. Fie, de asemenea:

$$n^2 + 7n = x,\ y = x + 6.$$

În felul acesta:

$$N_1 = n(n + 1)(n + 2)\ldots(n + 7) = y^4 + 4y^3 - 36y^2 - 144y.$$

Prin dezvoltare, deducem:

$$(y^2 + 2y - 21)^2 < N_1 < (y^2 + 2y - 20)^2$$

pentru $y \geqslant 100$ adică N_1 nu poate fi pătrat perfect pentru $y \geqslant 100$ adică pentru $x + 6 \geqslant 100$ adică, în fond, pentru $n^2 + 7n \geqslant 94$, deci pentru $n > 6$.

Pentru $n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ afirmația se verifică direct prin calcul.

X.P.22. Dacă p este număr prim impar:

$$a^p + (p - a)^p = p^p - \binom{p}{1} p^{p-1}\, a + \ldots +$$

$$+ \binom{p}{p-1} p a^{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Dar expresia din enunț nu este altceva decît:

$$\sum_{a=0}^{\frac{p-1}{2}} [a^p + (p - a)^p].$$

X.P.23. Evident:

$$\overline{\underbrace{xx\ldots x}_{2n \text{ cifre}}} = x \cdot \overline{\underbrace{11\ldots 1}_{2n \text{ cifre}}} = \frac{x}{9}(10^{2n} - 1),$$

$$\overline{\underbrace{yy\ldots y}_{n \text{ cifre}}} = y \cdot \overline{\underbrace{11\ldots 1}_{n \text{ cifre}}} = \frac{y}{9}(10^{n} - 1),$$

$$\overline{\underbrace{zz\ldots z}_{n \text{ cifre}}} = z \cdot \overline{\underbrace{11\ldots 1}_{n \text{ cifre}}} = \frac{z}{9}(10^{n} - 1).$$

Făcînd $10^n = u + 1$ deci $10^{2n} - 1 = u^2 + 2u$ ecuația devine:

$$\frac{x}{9}(u^2 + 2u) - \frac{y}{9}u = \frac{z^2}{81}u^2$$

sau, simplificînd prin $u \neq 0$:

$$9x(u + 2) - 9y = z^2 u$$

de unde:

$$(9x - z^2)\ u = 9y - 18x$$

deci:

$$u = \frac{9y - 18x}{9x - z^2}.$$

Dacă $9x - z^2 \neq 0$ atunci egalitatea de mai sus ar da pentru u — implicit și pentru n — soluție unică. Deci:

$$9x - z^2 = 0 \text{ deci } z = 3\ \sqrt{x}$$

și:

$$9y - 18x = 0 \text{ deci } y = 2x.$$

Trebuie deci ca x să fie pătrat perfect adică $x \in \{1, 4, 9\}$. Dar $x = 9$ nu convine deoarece obținem $y = 18 > 10$. Ca atare, convin soluțiile:

$$x = 1,\ y = 2,\ z = 3$$

și:

$$x = 4,\ y = 8,\ z = 6.$$

X.P.24*. Fie:

$a_1°$). $Z_1 = 9$;

$a_2°$). $Z_2 = 9^{Z_1} = (10 - 1)^{Z_1} = 10^{Z_1} - C^1_{Z_1} \cdot 10^{Z_1 - 1} + \\ + \ldots + C^{Z_1 - 1}_{Z_1} \cdot 10 - 1$

unde termenii omiși se divid la 100. Prin urmare, ultimele două cifre ale numărului Z_2 sînt date de:

$$C^1_{Z_1} \cdot 10 - 1 = 9 \cdot 10 - 1 = 89.$$

$a_3°$). $Z_3 = 9^{Z_2} = (10 - 1)^{Z_2} = 10^{Z_2} - C^1_{Z_2} \cdot 10^{Z_2 - 1} + \\ + \ldots - C^2_{Z_2} \cdot 10^2 + C^1_{Z_2} \cdot 10 - 1.$

Dar Z_2 se termină în 89, prin urmare $C^1_{Z_2} = Z_2$ se termină în 89 iar:

$$C^2_{Z_2} = \frac{Z_2(Z_2 - 1)}{1 \cdot 2} = \frac{(\ldots 89)\ (\ldots 88)}{2}$$

(însemnînd prin puncte cifrele necunoscute) se termină în cifra 6.

Prin urmare, ultimele trei cifre ale numărului Z_3 vor fi aceleași cu ultimele trei cifre ale numărului $-600+890-1=289$.

$$a_4^\circ).\ Z_4 = 9^{Z_3} = (10-1)^{Z_3} = 10^{Z_3} - C_{Z_3}^1 \cdot 10^{Z_3-1} + \\ + \ldots + C_{Z_3}^3 \cdot 10^3 - C_{Z_3}^2 \cdot 10^2 + C_{Z_3}^1 \cdot 10 - 1.$$

Deoarece Z_3 se termină în 289 atunci și $C_{Z_3}^1 = Z_3$ se termină în 289. Însă:

$$C_{Z_3}^2 = \frac{Z_3(Z_3-1)}{1\cdot 2} = \frac{(\ldots 289)\,(\ldots 288)}{2}$$

se termină în 16;

$$C_{Z_3}^3 = \frac{Z_3(Z_3-1)(Z_3-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{(\ldots 289)\,(\ldots 288)\,(\ldots 287)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

se termină în cifra 4. Prin urmare, ultimele 4 cifre ale lui Z_4 vor fi aceleași ca și ultimele 4 cifre ale numărului:

$$4000 - 1600 + 2890 - 1 = 5289.$$

$$a_5^\circ).\ Z_5 = 9^{Z_4} = (10-1)^{Z_4} = 10^{Z_4} - C_{Z_4}^1 \cdot 10^{Z_4-1} + \\ + \ldots - C_{Z_4}^4 \cdot 10^4 + C_{Z_4}^3 \cdot 10^3 - C_{Z_4}^2 \cdot 10^2 + C_{Z_4}^1 \cdot \\ \cdot 10 - 1.$$

Deoarece Z_4 se termină în 5289 atunci și $C_{Z_4}^1 = Z_4$ se termină în 5289;

$$C_{Z_4}^2 = \frac{Z_4(Z_4-1)}{1\cdot 2} = \frac{(\ldots 5289)\,(\ldots 5288)}{2}$$

se termină în 116;

$$C_{Z_4}^3 = \frac{Z_4(Z_4-1)(Z_4-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{(\ldots 5289)\,(\ldots 5288)\,(\ldots 5287)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

se termină în 64;

$$C_{Z_4}^4 = \frac{Z_4(Z_4-1)(Z_4-2)(Z_4-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} =$$
$$= \frac{(\ldots 5289)(\ldots 5288)(\ldots 5287)(\ldots 5286)}{24}$$

se termină în cifra 6. Prin urmare, ultimele 5 cifre ale numărului Z_5 sînt date de ultimele 5 cifre ale numărului:

$$-60000 + 64000 - 11600 + 52890 - 1 = 45289.$$

Analog, $Z_6 = 9^{Z_5}$ are ultimele cinci cifre 45289 și, în general, $Z_n = 9^{Z_{n-1}}$ are ultimele cinci cifre egale cu 45289, pentru orice $n \geqslant 5$.

Pentru $n = 20000$ obținem cazul particular al problemei.

X.P.25*. Fie:

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{p-1}{2}} \tag{1}$$

cele mai mici resturi din șirul:

$$1\cdot n,\ 2\cdot n,\ \ldots, \frac{p-1}{2}\cdot n.$$

Să notăm cu $a_1, a_2, \ldots, a_l$ numerele din șirul (1) pentru care $1 \leqslant a_i < \frac{p}{2}$ și cu $b_1, b_2, \ldots, b_m$ numerele din același șir pentru care $\frac{p}{2} < b_i \leqslant p-1$.

Deci:

$$l + m = \frac{p-1}{2}$$

și:

$$(a_1a_2\ldots a_l)(b_1b_2\ldots b_m) \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)!\ n^{\frac{p-1}{2}} \pmod p. \tag{2}$$

Deoarece $\frac{p}{2} < b_i \leqslant p-1$, rezultă $1 \leqslant p - b_i < \frac{p}{2}$. Pe de altă parte numerele $p - b_j$ vor fi diferite de numerele a_i căci dacă am presupune că $p - b_j \equiv a_i \pmod{p}$ deci $a_i + b_j \equiv 0 \pmod{p}$ am ajunge la o contradicție. În adevăr, în aceste cazuri, deoarece $a_i \equiv h_i\, n \pmod{p}$, $b_j \equiv k_j n \pmod{p}$, obținem $n(h_i + k_j) \equiv 0 \pmod{p}$. Deoarece $*(n, p) = 1$, obținem $h_i + k_j \equiv 0 \pmod{p}$, adică $p \mid h_i + k_j$, absurd, deoarece $1 \leqslant k_j \leqslant \frac{p-1}{2}$, $1 \leqslant h_i \leqslant \frac{p-1}{2}$ de unde $1 < h_i + k_j \leqslant p - 1$ deoarece nu putem avea $h_i = k_j = \frac{p-1}{2}$.

Ca atare, numerele:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_l,\ p - b_1,\ p - b_2,\ \ldots,\ p - b_m$$

constituie o permutare a numerelor $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$.

De aici obținem:

$$(a_1 a_2 \ldots a_l)\,(p - b_1)\,(p - b_2) \ldots (p - b_m) \equiv \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}$$

sau:

$$(a_1 a_2 \ldots a_l)\,(b_1 b_2 \ldots b_m) \equiv (-1)^m \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}.$$

Această relație, împreună cu (2), dă:

$$(-1)^m \left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)!\, n^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

deci:

$$(-1)^m \equiv n^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Deoarece, potrivit criteriului lui *Euler*:

$$\left(\frac{n}{p}\right) \equiv (-1)^m \pmod{p}$$

rezultă:

$$\left(\frac{n}{p}\right) = (-1)^m.$$

X.P.26[3]. Aplicînd lema lui *Gauss* pentru $n = 2$, obţinem şirul:

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 2,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2} \cdot 2.$$

Fie m numărul numerelor din acest şir, congruente cu unele numere din şirul:

$$\frac{p+1}{2},\ \frac{p+3}{2},\ \ldots,\ p-1.$$

Dacă $2h$ este unul din aceste numere, deoarece $\frac{p}{2} < 2h < p$, rezultă $\frac{p}{4} < h < \frac{p}{2}$ şi deci h poate lua valorile:

$$\left[\frac{p}{4}\right]_* + 1, \left[\frac{p}{4}\right]_* + 2, \ldots, \left[\frac{p}{2}\right]_*.$$

Obţinem deci:

$$m = \left[\frac{p}{2}\right]_* - \left[\frac{p}{4}\right]_*.$$

Să arătăm că:

$$m \equiv \frac{p^2-1}{8} \pmod{2}.$$

Pentru aceasta, să observăm că orice număr prim impar se scrie sub forma $p = 8a + r$, $a \in N \cup \{0\}$, r fiind unul din numerele 1, 3, 5 sau 7. Pentru fiecare

din aceste cazuri se poate arăta că este satisfăcută congruența precedentă. În adevăr, deoarece:

$$\left[\frac{8a+r}{2}\right]_* = 4a + \left[\frac{r}{2}\right]_*$$

și:

$$\left[\frac{8a+r}{4}\right]_* = 2a + \left[\frac{r}{4}\right]_*$$

obținem:

$$m \equiv \left[\frac{r}{2}\right]_* - \left[\frac{r}{4}\right] \pmod 2.$$

Pentru cele patru valori ale lui r, obținem, respectiv, $m \equiv 0, 1, 1, 0 \pmod 2$. Pentru $\frac{p^2-1}{8}$ obținem, de asemenea:

$$\frac{p^2-1}{8} \overset{\text{mod } 2}{\equiv} \frac{r^2-1}{8} \equiv 0, 1, 1, 0 \pmod 2$$

respectiv, deci în general:

$$m \equiv \frac{p^2-1}{8} \pmod 2$$

și afirmația este demonstrată.

X.P.27[3]. Fie mulțimea:

$$T = \{kp - hq\}$$

unde $k = 1, 2, \ldots \frac{q-1}{2}$ și $h = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$.

Toate elementele mulțimii T sînt diferite de zero și diferite între ele două cîte două. În adevăr, dacă presupunem $kp - hq = 0$, rezultă $kp = hq$ deci $p \mid hq$. Cum însă $*(p, q) = 1$, rezultă $p \mid h$, absurd, deoarece $1 \leqslant h \leqslant \frac{p-1}{2}$. Dacă admitem că există k_1, h_1, k_2, h_2

astfel încît $k_1p - h_1p = k_2p - h_2q$ cu $h_1 \neq h_2$ sau $k_1 \neq k_2$ sau, în fine $h_1 \neq h_2$, $k_1 \neq k_2$, rezultă:

$$(k_1 - k_2)p = (h_1 - h_2)q$$

deci:

$$p \mid (h_1 - h_2)q$$

adică $p \mid (h_1 - h_2)$, absurd, deoarece $1 \leqslant h_1 \leqslant \frac{p-1}{2}$, $1 \leqslant h_2 \leqslant \frac{p-1}{2}$ deci $0 \leqslant |h_1 - h_2| \leqslant p - 1$ deci $h_1 = h_2$ și, implicit, $k_1 = k_2$, contrar ipotezei.

Urmează că T are $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ elemente deoarece pentru fiecare h există $\frac{q-1}{2}$ numere $kp - hq$ aparținînd mulțimii T iar h poate lua $\frac{p-1}{2}$ valori.

Să calculăm cîte numere pozitive și cîte numere negative sînt în mulțimea T.

Din $kp - hq > 0$ rezultă $h < \frac{kp}{q}$ și deci, pentru un k fixat, h poate lua $\left[\frac{kp}{q}\right]_*$ valori.

Ca atare, în mulțimea T se găsesc $\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{kp}{q}\right]_*$ numere pozitive.

Analog, în mulțimea T se găsesc $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{kq}{p}\right]_*$ numere negative. În fond:

$$\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{kp}{q}\right]_* + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{kq}{p}\right]_* = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}.$$

X.P.28*. Să considerăm șirul:

$$1 \cdot q,\ 2 \cdot q,\ \ldots, \frac{p-1}{2} \cdot q \tag{1}$$

și:

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{\frac{p-1}{2}} \tag{2}$$

șirul celor mai mici resturi pozitive corespunzătoare numerelor din șirul (1). Fie:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_l$$

numerele din șirul (2) astfel ca $1 \leqslant a_i < \frac{p}{2}$ și:

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$$

numerele din șirul (2) astfel ca $\frac{p}{2} < b_j \leqslant p-1$.

Fie:

$$\sum_{i=1}^{l} a_i = a;\ \sum_{j=1}^{m} b_j = b.$$

Cum șirul:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_l,\ p-b_1,\ \ldots,\ p-b_m$$

este o permutare a șirului:

$$1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2},$$

rezultă:

$$a - b + mp = 1 + \ldots + \frac{p-1}{2},$$

adică:

$$a - b + mp = \frac{p^2-1}{8}. \tag{3}$$

Pe de altă parte, împărțind pe hq la p, pentru $h = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ obținem:

$$hq = p\left[\frac{hq}{p}\right]_* + r_h.$$

Sumînd după h, găsim:

$$\frac{p^2-1}{8}q = p\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{hq}{p}\right]_* + a + b. \qquad (4)$$

Eliminînd pe a între (3) și (4) obținem:

$$\frac{p^2-1}{8}(q-1) = p\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{kq}{p}\right]_* + 2b - mp.$$

Deoarece $q - 1 \overset{\text{mod } 2}{\equiv} 2b \equiv 0 \pmod 2$, rezultă:

$$m \equiv \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{hq}{p}\right]_* \pmod 2$$

unde:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^m.$$

Analog:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{m'}$$

unde:

$$m' \equiv \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{kp}{q}\right]_* \pmod 2$$

și deci:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{m+m'}$$

adică, cum:

$$m + m' \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{kq}{p}\right]_* + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{kp}{q}\right]_* \pmod 2$$

și avînd în vedere rezultatul stabilit în problema precedentă, rezultă:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

X.P.29². Să presupunem, prin absurd, că există $n \in N$, $n > 1$, astfel încît $n!$ să fie pătrat perfect. Evident, în șirul de numere 1, 2, ..., n există un număr prim p care este mai mare decît precedentele. Pentru că $n!$ să fie pătrat perfect este necesar ca exponentul la care figurează p în descompunerea canonică a lui $n!$ să fie par. Aceasta înseamnă că există printre numerele 1, 2, ..., n încă un număr divizibil cu p (diferit deci de p). Primul număr multiplu de p, după p, este $2p$ dar între p și $2p$, potrivit teoremei lui *Cebîșev*, există cel puțin un număr prim, care, evident, este mai mare decît p, contrar proprietății de maximalitate a lui p. Rămîne că $n!$ nu poate fi pătrat perfect, $(\forall)\, n \in N^* - \{1\}$.

X.P.30¹. Cum între p_n și $2p_n$ există cel puțin un număr prim, urmează că $p_{n+1} < 2p_n$. Iterînd această inegalitate:

$$p_{n+1} < 2p_n < 2^2 p_{n-1} < \ldots < 2^n p_1 = 2^{n+1}$$

deci obținem inegalitatea din enunț. Egalitate numai în cazul $p_1 = 2 \leqslant 2^1$.

X.P.31. Afirmația este evidentă, în virtutea faptului că cel mai mic număr cu m cifre este 10^{m-1} iar cel mai mare $10^m - 1$ și că, după teorema lui *Cebîșev*, între 10^{m-1} și $2 \cdot 10^{m-1} < 10^m - 1$, respectiv $2 \cdot 10^{m-1}$ și $4 \cdot 10^{m-1} < 10^m - 1$ și încă între $4 \cdot 10^{m-1}$ și $8 \cdot 10^{m-1} < 10^m - 1$ există cel puțin un număr prim.

X.P.32. Din faptul că $p_n < 2^n$, urmează $N_n < 10^n$ ceea ce demonstrează afirmația făcută (aici $n \in N^* - \{1\}$, pentru $n = 1$ afirmația fiind evidentă).

X.P.33[2]. *Soluția I.* Să arătăm că:

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$$

este un număr întreg. În adevăr, dacă:

$$S_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$$

atunci:

$$S_{n+2} - 4S_{n+1} + S_n = 0$$

după cum se poate constata făcînd calculele. Dar $S_1 = 4 \in Z$ și $S_2 = 14 \in Z$. Presupunînd pentru un $k \in N^*$ oarecare, $S_k \in Z$, $S_{k+1} \in Z$, găsim, potrivit relației anterioare, $S_{k+2} = 4S_{k+1} - S_k \in Z$. Deoarece $(2 - \sqrt{3})^n < 1$, atunci:

$$[(2 + \sqrt{3})^n]_* = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 1$$

(vezi soluția problemei X.P.37). Desfăcînd parantezele, după formula lui *Newton*, obținem că:

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 2\,(2^n + C_n^2 \cdot 2^{n-2} \cdot 3 + C_n^4 \cdot 2^{n-4} \cdot 3^2 + \ldots)$$

se divide la 2 și, respectiv:

$$[(2 + \sqrt{3})^n]_* = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 1$$

este impar.

Soluția a II-a. Numărul $(2 + \sqrt{3})^n$, potrivit formulei lui *Newton*, poate fi scris sub forma:

$$a_n + b_n\sqrt{3}$$

unde a_n și b_n sînt numere întregi. Să arătăm că:

$$a_n^2 - 3b_n^2 = 1.$$

Pentru demonstrație vom folosi metoda inducției matematice.

Pentru $n = 1$, $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ și relația se verifică:

$$2^2 - 3 \cdot 1 = 1.$$

Presupunem, pentru un n oarecare:

$$(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$$

unde:

$$a_n^2 - 3b_n^2 = 1.$$

În aceleași condiții, obținem:

$$(2 + \sqrt{3})^{n+1} = (a_n + b_n \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = \\ = (2a_n + 3b_n) + (a_n + 2b_n)\sqrt{3}.$$

De aici:

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n;\ b_{n+1} = a_n + 2b_n$$

și:

$$a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 = (2a_n + 3b_n)^2 - 3(a_n + 2b_n)^2 = \\ = a_n^2 - 3b_n^2 = 1$$

ceea ce sfîrșește demonstrația.

Ca atare:

$$[a_n + b_n \sqrt{3}]_* = a_n + [b_n \sqrt{3}]_* = a_n + \\ + [\sqrt{3b_n^2}]_* = a_n + [\sqrt{a_n^2 - 1}]_* = a_n + (a_r - \\ - 1) = 2a_n - 1$$

adică:

$$[(2 + \sqrt{3})^n]_*$$

este impar.

X.P.34[1]. Din egalitățile:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2},\ n \in N;$$

$$\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n}\right)^3 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{n^3}$$

urmează că pentru fiecare n:

$$\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\right)^3 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^2.$$

De aici:

$$1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$$

sau, înmulțind această ultimă inegalitate cu $n^{\frac{2}{3}}$:

$$n^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\cdot n^{-\frac{1}{3}} > (n+1)^{\frac{2}{3}}$$

și, în definitiv:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right).$$

Analog:

$$\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\right)^3 = 1-2\cdot\frac{1}{n}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{n^3} >$$
$$> 1-2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

deci:

$$1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n} > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}},$$

adică, succesiv:

$$n^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}n^{-\frac{1}{3}} > (n-1)^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right].$$

Putem dar să scriem:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}>\frac{3}{2}\left[(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{4^2})+\right.$$
$$\left.+(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{5^2})+\ldots+(\sqrt[3]{1000001^2}-\sqrt[3]{1000000^2})\right]=$$
$$=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{1000002000001}-\sqrt[3]{16})>\frac{3}{2}\cdot 10000-$$
$$-\sqrt[3]{54}>15000-4=14996.$$

Pe de altă parte:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}<\frac{3}{2}\left[(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{3^2})+\right.$$
$$\left.+(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{4^2})+\ldots+(\sqrt[3]{1000000^2}-\sqrt[3]{999999^2})\right]=$$
$$=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{1000000000000}-\sqrt[3]{9})<\frac{3}{2}(10000-2)=$$
$$=14997.$$

În felul acesta, partea întreagă a numărului:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}$$

este egală cu 14996.

X.P.35[1]. Soluțiile sînt:

$$x_1=x_0+bh$$
$$y_1=y_0-ah$$

unde (x_0, y_0) este o soluție în numere întregi a ecuației iar $h\in Z$.

În adevăr, fie (x_0, y_0) o soluție a ecuației:

$$ax_0+by_0=c \tag{1}$$

și respectiv (x_1, y_1) altă soluție:

$$ax_1+by_1=c. \tag{2}$$

În plus, putem presupune $_*(a, b) = 1$, în caz contrar simplificăm ambii membrii ai ecuației (2) prin c.m.m.d.c. al numerelor a și b. Scăzînd membru cu membru egalitățile (1) și (2), găsim:

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0$$

de unde:

$$y_1 - y_0 = -\frac{a}{b}(x_1 - x_0).$$

De aici, cum $_*(a, b) = 1$, urmează $x_1 - x_0 = hb$ deci $x_1 = x_0 + hb$ și deci $y_1 = y_0 - ha$, c.c.t.d.

X.P.36*. Vom calcula în două moduri numărul de zerouri cu care se termină produsul:

$$\left[\frac{(b + 5a)(25^n - 1)}{24}\right]!$$

(vezi X.2.4). Pe de o parte, conform formulei X.2.4.1, acest număr este egal cu:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(b + 5a)(25^n - 1)}{24 \cdot 5^k}\right]_*$$

iar pe de altă parte, conform teoremei lui *Legendre*, cum:

$$\frac{(b + 5a)(25^n - 1)}{24} = \overline{abab \ldots ab}_{(5)}$$

atît a cît și b repetîndu-se de n ori, numărul de zerouri este:

$$\frac{\frac{(25^n - 1)(5a + b)}{24} - n(a + b)}{4} =$$

$$= \frac{(25^n - 1)(5a + b) - 24n(a + b)}{96}.$$

Condiția $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ este necesară deoarece, în baza 5, cifrele unui număr nu pot depăși pe 4.

În concluzie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(b+5a)(25^n-1)}{24\cdot 5^k}\right]_* =$$

$$= \frac{(25^n-1)(5a+b)-24n(a+b)}{96}$$

adică tocmai relația din enunț.

X.P.37[2]. Să dovedim că partea zecimală a numărului $(2+\sqrt{2})^n$ este $1-(2-\sqrt{2})^n$, adică:

$$(2+\sqrt{2})^n - \lfloor(2+\sqrt{2})^n\rfloor_* = 1-(2-\sqrt{2})^n. \quad (1)$$

Așa cum am arătat în soluția problemei X.P.33, deducem că numărul:

$$(2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n$$

este întreg.

Cum $(2-\sqrt{2})^n < 1$, folosind inducția matematică, găsim:

$$[(2+\sqrt{2})^n]_* = (2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n - 1$$

adică formula (1). Dacă partea fracționară a numărului $(2+\sqrt{2})^n$ este t atunci, evident:

$$1-(2-\sqrt{2})^n = t$$

adică:

$$1-t = (2-\sqrt{2})^n$$

și, logaritmînd:

$$n = \log_{2-\sqrt{2}}(1-t).$$

X.P.38[3]. Avem:

$$\frac{1}{49} =$$

$$= 0,(020408163265306122448979591836734693877551)$$

sau, prescurtat:

$$\frac{1}{49} = 0,(P).$$

Cel mai apropiat număr întreg de 1000 care este multiplu de 42 este $1008 = 24 \cdot 42$. Prin urmare:

$$\left[\frac{10^{1008}}{49}\right]_* = \left[10^{1008} \cdot \frac{1}{49}\right]_* = \underbrace{PP \ldots P}_{24 \text{ ori}}$$

deci:

$$M = \frac{10^{1008} - 1}{49} = 10^{1008} \cdot \frac{1}{49} - \frac{1}{49} = \underbrace{PP \ldots P}_{24 \text{ ori}}$$

este număr întreg, format din 1008 cifre, care se poate împărți în 24 de grupe din 49 de cifre care se repetă (de fapt, numărul M nu este format din 1008 cifre, ci din 1007 deoarece începe cu 0).

Vom face acum diferența dintre numărul N_1 care ne interesează $\left(\frac{50^{1000} - 1}{49}\right)$ și numărul M:

$$N_1 - M = \frac{5^{1000} \cdot 10^{1000} - 1}{49} - \frac{10^{1008} - 1}{49} =$$

$$= \frac{5^{1000} - 10^8}{49} \cdot 10^{1000}.$$

Deoarece diferența $N_1 - M$ a două numere întregi este număr întreg și 10^{1000} este relativ prim cu 49, atunci $5^{1000} - 10^8$ trebuie să se dividă cu 49. Prin urmare, numărul $X = \frac{5^{1000} - 10^8}{49}$ este întreg și diferența $N_1 - M = 10^{1000} X$ se termină cu 1000 de zerouri. În felul acesta ultimele 99 de cifre ale numărului N_1 sînt aceleași ca și ultimele 99 de cifre ale numărului M și anume:

$$836734693877551PP.$$

X.P.39[3]. Fie:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2^n. \qquad (1)$$

Fie p cea mai mare putere a lui 2 pentru care 2^p divide fiecare din numerele a, b, c, d. Împărțind ambii membri ai egalității (1) prin 2^{2p}, găsim:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 2^{n-2p} \qquad (1')$$

unde $a = 2^p a_1$, $b = 2^p b_1$, $c = 2^p c_1$, $d = 2^p d_1$ și cel puțin unul din numerele a_1, b_1, c_1, d_1 este impar.

Dacă din cele patru numere a_1, b_1, c_1, d_1 numai unul sau trei sînt impare, atunci numărul $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2$ este impar și egalitatea (1') este imposibilă.

Dacă din numerele a_1, b_1, c_1, d_1 două, de exemplu a_1 și b_1, sînt impare, $a_1 = 2k + 1$ și $b_1 = 2l + 1$, iar celelalte două, c_1 și d_1 sînt pare, $c_1 = 2m$ și $d_1 = 2n_1$, atunci:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 +$$
$$+ 4m^2 + 4n_1^2 = 2[2(k^2 + k + l^2 + l + m^2 + n_1^2) + 1],$$

absurd, întrucît $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 2^{n-2p}$ nu are divizori impari (dacă $l = k = m = n_1 = 0$ atunci $c_1 = d_1 = 0$ și $c = d = 0$, soluție inacceptabilă).

Dacă însă fiecare din cele patru numere, a_1, b_1, c_1, d_1, sînt impare, $a_1 = 2k + 1$, $b = 2l + 1$, $c_1 = 2m + 1$, $d_1 = 2n_1 + 1$, atunci:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 +$$
$$+ 4l + 1 + 4m^2 + 4m + 1 + 4n_1^2 + 4n_1 + 1 =$$
$$= 4[k(k + 1) + l(l + 1) + m(m + 1) + n(n + 1) + 1].$$

Însă produsul a două numere întregi consecutive este totdeauna un număr par (unul din factorii produsului este obligatoriu par). Prin urmare, expresia din paranteza dreaptă este un număr impar.

Rămîne de studiat cazul în care $n - 2p = 2$ deci $n = 2p + 2$, $k = l = m = n_1 = 0$, $a_1 = b_1 = c_1 = d_1$ deci $a = b = c = d = 2$.

În felul acesta, 2^n se descompune în mod unic, pentru n par (pentru n impar am văzut că nu este posibilă o descompunere de tipul cerut), $n = 2p + 2$, sub forma:

$$2^{2p+2} = (2^p)^2 + (2^p)^2 + (2^p)^2 + (2^p)^2.$$

X.P.40*. a°). Vom arăta mai întîi că pentru orice $n, q \in N$:

$$\left[\frac{n}{q}\right]_* = \begin{cases} \left[\frac{n-1}{q}\right]_* + 1 & \text{dacă } n \equiv 0 \pmod q \\ \left[\frac{n-1}{q}\right]_* & \text{dacă } n \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases} \tag{1}$$

În adevăr $n \equiv 0 \pmod q$ dacă și numai dacă există $s \in N$ astfel încît $n = sq$ deci dacă $n \equiv 0 \pmod q$ atunci:

$$\left[\frac{n}{q}\right]_* = \left[\frac{sq}{q}\right]_* = [s]_* = s$$

iar:

$$\left[\frac{n-1}{q}\right]_* = \left[\frac{sq-1}{q}\right]_* = \left[\frac{(s-1)q + q - 1}{q}\right]_* =$$

$$= \left[(s-1) + \frac{q-1}{q}\right]_* = s - 1$$

și, prin urmare, dacă $n \equiv 0 \pmod q$ atunci, clar:

$$\left[\frac{n}{q}\right]_* = \left[\frac{n-1}{q}\right]_* + 1.$$

Dacă însă $n \not\equiv 0 \pmod q$ atunci există $r \in N$ și $s \geqslant 0$ astfel încît $n = sq + r$, cu $0 < r < q$. Deci, în acest caz:

$$\left[\frac{n}{q}\right]_* = \left[\frac{sq + r}{q}\right]_* = \left[s + \frac{r}{q}\right]_* = s$$

deoarece $0 < \frac{r}{q} < 1$ iar:

$$\left[\frac{n-1}{q}\right]_* = \left[\frac{sq+r-1}{q}\right]_* = \left[s + \frac{r-1}{q}\right]_* = s$$

deoarece $0 \leqslant \frac{r-1}{q} < 1$. Ca atare, dacă $n \not\equiv 0 \pmod q$ atunci $\left[\frac{n}{q}\right]_* = \left[\frac{n-1}{q}\right]_*$ deci relația (1) este astfel demonstrată.

b°). Să observăm că diferența $S_n^p - S_{n-1}^p$ este egală cu numărul de întregi dintre numerele:

$$\frac{n + ip^h}{p^{h+1}}$$

cu $1 \leqslant i \leqslant p-1$.

În adevăr:

$$S_n^p - S_{n-1}^p = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{p-1} \left[\frac{n+ip^h}{p^{h+1}}\right]_* - \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{p-1} \left[\frac{n-1+ip^h}{p^{h+1}}\right]_* =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{p-1} \left(\left[\frac{n+ip^h}{p^{h+1}}\right]_* - \left[\frac{n-1+ip^h}{p^{h+1}}\right]_*\right)$$

și, ținînd seama de relația (1), rezultă tocmai afirmația anterioară.

c°). Este clar că oricare ar fi $n \in N$ și oricare ar fi $p \in N - \{1\}$ cu $p \leqslant n$, există $\alpha \in N \cup \{0\}$ și un $m \in N$ cu $m \not\equiv 0 \pmod p$ astfel încît $n = p^\alpha m$.

Vom demonstra acum că unul și numai unul dintre numerele de forma $\frac{n+ip^h}{p^{h+1}}$ cu $1 \leqslant i \leqslant p-1$ și h întreg pozitiv, este întreg. În adevăr, în baza afirmației anterior enunțată, pentru $h = \alpha$:

$$\frac{n+ip^\alpha}{p^{\alpha+1}} = \frac{mp^\alpha + ip^\alpha}{p^{\alpha+1}} = \frac{m+i}{p}. \qquad (2)$$

Deoarece $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ atunci există un $t \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ astfel ca $m \equiv t \pmod{p}$ deci $m = up + t$ unde $u \geqslant 0$. Din faptul că $t \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ rezultă $p - t \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ și deci dacă $i = p - t$ atunci relația (2) dă:

$$\frac{n + (p-t)p^\alpha}{p^{\alpha+1}} = \frac{mp^\alpha + (p-t)p^\alpha}{p^{\alpha+1}} =$$

$$= \frac{m + p - t}{p} = \frac{up + t + p - t}{p} = u + 1 \in N.$$

Dacă însă $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\} - \{p-t\}$ atunci:

$$\frac{n + ip^\alpha}{p^{\alpha+1}} = \frac{m+1}{p} = \frac{up + t + i}{p} = u + \frac{t+i}{p} =$$

$$= u + \frac{t + (p-t) + v}{p} = u + 1 + \frac{v}{p}$$

cu $v \in \{-(p-t-1), -(p-t-2), \ldots, -1, 1, 2, \ldots, t-1\}$ deci $|0 < v| < p$ și $0 < \left|\frac{v}{p}\right| < 1$ și, prin urmare:

$$\frac{n + ip^\alpha}{p^{\alpha+1}} = \frac{m+i}{p} \notin N$$

dacă $i \neq p - t$.

Pentru $k < \alpha$ putem scrie:

$$\frac{n + ip^k}{p^{k+1}} = \frac{mp^\alpha + ip^k}{p^{k+1}} = \frac{p^k(mp^{\alpha-k} + i)}{p^{k+1}} =$$

$$= \frac{mp^{\alpha-k} + i}{p} = mp^{\alpha-k-1} + \frac{i}{p} \notin N$$

deoarece $i \not\equiv 0 \pmod{p}$ și $\alpha - k \in N$.

Pentru $k > \alpha$:

$$\frac{n + ip^{\alpha}}{p^{k+1}} = \frac{mp^{\alpha} + ip^{k}}{p^{k+1}} = \frac{p^{\alpha}(m + ip^{k-\alpha})}{p^{k+1}} =$$

$$= \frac{m + ip^{k-\alpha}}{p^{k+1-\alpha}} \notin N$$

deoarece $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ și $k - \alpha > 0$. Cu aceasta afirmația este dovedită.

Toate considerațiile precedente dovedesc, respectiv că:

$$S_n^p = S_{n-1}^p + 1. \tag{3}$$

Deoarece $ip^k < p^{k+1}$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ rezultă că:

$$S_0^p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{p-1} \left[\frac{0 + ip}{p^{k+1}}\right]_* = 0$$

și atunci din (3), prin recurență, obținem:

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{p-1} \left[\frac{n + ip^k}{p^{k+1}}\right]_* = n$$

adică tocmai relația de demonstrat.

X.P.41*. Să arătăm pentru început că $(\forall)\ M \in N$, M impar, $(\exists)\ n \in N$ astfel ca $*(2^n - 3, M) = 1$. Pentru aceasta luăm $n = \varphi(M)$, φ fiind indicatorul lui *Euler;* însă $2^{\varphi(M)} \equiv 1 \pmod{M}$ deoarece $*(2, M) = 1$ deci:

$$2^{\varphi(M)} - 1 = k_1 M,\ k_1 \in N.$$

Rezultă de aici $*(2^{\varphi(M)} - 3, M) = 1$ deoarece dacă $d \mid M$ și $d \mid 2^{\varphi(M)} - 3 = k_1 M - 2$ avem $d \mid 2$ deci $d = 1$ căci M este impar. Fie:

$$t_k = 2^k - 3, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Presupunem că există $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_k}$ astfel ca $*(t_a, t_b) = 1$ pentru orice $a, b \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $a \neq b$. Să construim pe $t_{i_{k+1}}$.

Fie $M = t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k}$. Conform celor demonstrate anterior, pentru $n = \varphi(M)$, are loc $*(M, 2^n - 3) = 1$. Alegem $t_{i_{k+1}} = 2^{\varphi(M)} - 3$.

Evident că $*(t_{i_j}, t_{i_{k+1}}) = 1$ deoarece dacă presupunem că există $d \mid t_{i_j}$, $d \mid t_{i_{k+1}}$ pentru un $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ rezultă $d \mid M$ și $d \mid 2^{\varphi(M)} - 3$ deci $d = 1$.

Așadar putem construi șirul infinit $\{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}, \dots\}$ cu $*(t_{i_q}, t_{i_p}) = 1$ pentru $p \neq q$. Primii termeni pot fi aleși chiar $t_3 = 2^3 - 3 = 5$, $t_4 = 2^4 - 3 = 13$, $t_5 = 2^5 - 3 = 29$, ceilalți obținîndu-se prin procedeul indicat.

X.P.42*. Vom demonstra mai întîi că pentru orice număr real x avem:

$$\left[x + \frac{1}{2k}\right]_k = [2x]_k - [x]_k. \tag{1}$$

În adevăr:

$$[x]_k = \frac{p}{k}, \quad [x]_k \leqslant x < [x]_k + \frac{1}{k}$$

deci, considerînd numărul rațional $[x]_k + \frac{1}{2k}$:

$$[x]_k < [x]_k + \frac{1}{2k} < [x]_k + \frac{1}{k}$$

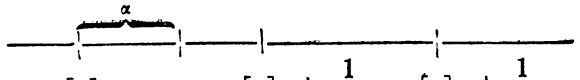
și:

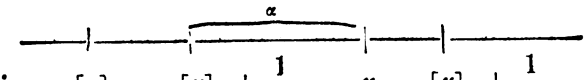
a°). $[x]_k \leqslant x < [x]_k + \frac{1}{2k}$

sau:

b°). $[x]_k + \frac{1}{2k} \leqslant x < [x]_k + \frac{1}{k}$

adică următoarele situații:

a°). 

b°). 

Dacă în cazul a°) notăm $\alpha = x - [x]_k$, iar în cazul b°) notăm $\alpha = x - [x]_k - \frac{1}{2k}$ atunci:

$$0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2k}$$

și deci în cazul a°), $x = [x]_k + \alpha$, iar în cazul b°), $x = [x]_k + \frac{1}{2k} + \alpha$.

Dacă ne situăm în cazul a°), atunci $2x = 2[x]_k + 2\alpha$ deci $[2x]_k = [2[x]_k + 2\alpha]_k = 2[x]_k$ deoarece din $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2k}$ rezultă $0 \leqslant 2\alpha < \frac{1}{k}$.

Pe de altă parte:

$$\left[x + \frac{1}{2k}\right]_k = \left[[x]_k + \frac{1}{2k} + \alpha\right]_k = [x]_k$$

deoarece $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2k}$ implică $\frac{1}{2k} \leqslant \alpha + \frac{1}{2k} < \frac{1}{k}$.

Deci în cazul a°):

$$\left[x + \frac{1}{2k}\right]_k = [x]_k = 2[x]_k - [x]_k = [2x]_k - [x]_k. \quad (2)$$

Dacă ne situăm în cazul b°), atunci $2x = 2[x]_k + \frac{1}{k} + 2\alpha$ deci $[2x]_k = \left[2[x]_k + \frac{1}{k} + 2\alpha\right]_k = 2[x]_k + \frac{1}{k}$ deoarece, din $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2k}$ rezultă $0 \leqslant 2\alpha < \frac{1}{k}$.

Însă și:

$$\left[x + \frac{1}{2k}\right]_k = \left[[x]_k + \frac{1}{2k} + \alpha + \frac{1}{2k}\right]_k =$$

$$= \left[[x]_k + \frac{1}{k} + 2\alpha\right]_k = [x]_k + \frac{1}{k}$$

și, ca atare, în acest caz:

$$\left[x + \frac{1}{2k}\right]_k = [x]_k + \frac{1}{k} = [2kx]_k - [x]_k. \qquad (3)$$

Relațiile (2) și (3) ne demonstrează relația (1) pentru orice x real. Să observăm acum că oricare ar fi numărul real x, există un număr natural s_0 astfel încît $0 \leqslant |x| < 2^{s_0}$. Dacă $x = |x|$ deci $0 \leqslant x < 2^{s_0}$ rezultă $2^{s_0} \leqslant x + 2^{s_0} < 2^{s_0+1}$ deci $0 < \frac{1}{2k} \leqslant \frac{x + 2^{s_0}}{2^{s_0+1}k} < \frac{1}{k}$ adică:

$$\left[\frac{x + 2^{s_0}}{2^{s_0+1}k}\right]_k = 0, \quad \left[\frac{x}{2^{s_0+1}k}\right]_k = 0$$

și pentru orice $s \geqslant s_0$:

$$\left[\frac{x + 2^s}{2^{s+1}k}\right]_k = 0, \quad \left[\frac{x}{2^{s+1}k}\right]_k = 0. \qquad (4)$$

Dacă $x < 0$ atunci $|x| = -x$ deci $0 < -x < 2^{s_0}$ sau $-2^{s_0} < x < 0$ de unde $0 < x + 2^{s_0} < 2^{s_0}$ deci:

$$0 < \frac{x + 2^{s_0}}{2^{s_0+1}k} < \frac{1}{2k} < \frac{1}{k}$$

de unde rezultă că:

$$\left[\frac{x+2^{s_0}}{2^{s_0+1}k}\right]_k = 0, \left[\frac{x}{2^{s_0+1}k}\right]_k = 0$$

și, pentru orice $s \geqslant s_0$:

$$\left[\frac{x+2^s}{2^{s+1}k}\right]_k = 0, \left[\frac{x}{2^{s+1}k}\right]_k = -\frac{1}{k}. \tag{5}$$

În baza relațiilor, (1) (4), (5), rezultă:

$$S_k(x) = \sum_{s=0}^{s_0}\left[\frac{x+2^s}{2^{s+1}k}\right]_k = \left[\frac{x}{k}\right]_k - \left[\frac{x}{2k}\right]_k + \left[\frac{x}{2k}\right]_k -$$

$$-\left[\frac{x}{2^2k}\right]_k + \left[\frac{x}{2^2k}\right]_k - \left[\frac{x}{2^3k}\right]_k + \ldots - \left[\frac{x}{2^{s_0}k}\right]_k + \left[\frac{x}{2^{s_0}k}\right]_k -$$

$$-\left[\frac{x}{2^{s_0+1}k}\right]_k = \left[\frac{x}{k}\right]_k - \left[\frac{x}{2^{s_0+1}k}\right]_k =$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{x}{k}\right]_k \text{ dacă } x \geqslant 0, \\ \left[\frac{x}{k}\right]_k + \frac{1}{k} \text{ dacă } x < 0. \end{cases}$$

X.P.43*. Observăm că proprietatea tabloului rămîne neschimbată (adevărată) cînd permutăm reciproc două linii sau două coloane. În adevăr, asemenea permutări fac să corespundă unui element a_{ij} mereu aceleași elemente aflate inițial pe linia i și coloana j, doar locurile lor în tablou apărînd schimbate.

Folosind proprietatea enunțată anterior, transformăm tabloul în forme echivalente, aducînd în pozițiile $a_{11}, a_{22}, \ldots$ zerouri.

Fie k numărul maxim de zerouri care pot apărea pe diagonală iar $\|b_{ij}\|$ tabloul care le conține și care s-a obținut din tabloul inițial $\|a_{ij}\|$.

Deci:

$$b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{kk} = 0$$

Sînt de studiat două cazuri:

$$\text{a°).}\ k = n$$

și:

$$\text{b°).}\ k \neq n.$$

Ne situăm în cazul a°). Cînd $k = n$, obținem că pentru orice $i \in N$, $1 \leqslant i \leqslant n$, din $b_{ii} = 0$, rezultă:

$$b_{1i} + b_{2i} + \ldots + b_{ni} + b_{i1} + \ldots + b_{in} \geqslant n$$

conform enunțului, încît, adunînd toate aceste inegalități, în număr de n, găsim:

$$2\sum b_{ij} \geqslant n^2$$

adică, în fond:

$$\sum a_{ij} \geqslant \frac{n^2}{2}$$

adică tocmai ce cerea enunțul.

Să studiem și cazul cînd $k \neq n$.

Împărțim tabloul în patru grupe, G_1, G_2, G_3, G_4, conținînd fiecare dintre ele elemente ale tabloului (eventual chiar nici unul) în modul următor:

în G_1 elementele b_{ij} cu $1 \leqslant i \leqslant k$; $1 \leqslant j \leqslant k$;

în G_2 elementele b_{ij} cu $1 + k \leqslant i \leqslant n$; $1 \leqslant j \leqslant k$;

în G_3 elementele b_{ij} cu $1 \leqslant i \leqslant k$; $1 + k \leqslant j \leqslant n$;

în G_4 elementele b_{ij} cu $1 + k \leqslant i \leqslant n$; $k + 1 \leqslant j \leqslant n$.

Fie S_i suma elementelor din G_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Sînt posibile cazurile, în ipoteza că nu pot fi aduse mai mult de k zerouri pe diagonală:

1°). G_4 nu conține zerouri.

2°). Dacă $b_{ij} \in G_2$ atunci $b_{ji} \in G_3$ și $b_{ji} + b_{ij} \geqslant 1$.

În adevăr, dacă $b_{ij} \in G_4$ și $b_{ij} = 0$, păstrînd neschimbate zerourile din G_1, aducem pe b_{ij} în locul lui $b_{k+1,\ k+1}$ și apare $b_{k+1,\ k+1} = 0$, absurd.

Acum, dacă 2°) nu ar fi adevărată, ar trebui ca $b_{ij} = b_{ij} = 0$, absurd, căci fie $b_{ij} = 0$ și atunci permutînd coloanele i și j păstrăm în G_1 zeroul pe poziția b_{ii} și introducem pe b_{ij} în G_4 care nu poate avea zerouri, deci 2°) este demonstrată.

În felul acesta:

$$2S_1 + S_2 + S_3 \geqslant kn. \tag{1}$$

Prin adunarea celor $2k(n-k)$ elemente din G_2 și G_3, grupînd și aplicînd 2°), obținem:

$$S_2 + S_3 \geqslant k(n-k). \tag{2}$$

În sfîrșit, G_4 are $(n-k)^2$ elemente nenule, deci:

$$S_4 \geqslant (n-k)^2$$

sau, astfel scris:

$$2S_4 \geqslant 2(n-k)^2. \tag{3}$$

Adunînd (1), (2) și (3) obținem:

$$2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \geqslant n^2 + (n-k)^2;$$

deoarece $n \neq k$, deci:

$$2\sum a_{ij} > n^2$$

de unde afirmația făcută în enunț.

X.P.44*. Vezi soluția problemei X.P.42.

X.P.45*. Avînd în vedere condiția b°), există cel mult 7 dreptunghiuri în partiția cerută, căci în cazul în care $p = 8$ și a_i sînt minimale, anume $a_i = i$, $i \in \in \{1, ..., 8\}$, numărul pătrățelelor de pe tablă ar fi:

$$2(1 + ... + 8) = 72 > 8 \cdot 8 = 64.$$

Deci $\max p \leqslant 7$.

Dacă $p = 7$, trebuie rezolvată ecuația:

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_7 = 32,$$

cu $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_7$.

Dacă $a_1 \neq 1$ atunci $\min S = 2 + \ldots + 8 = 35 > 32$ deci, cu necesitate $a_1 = 1$.

Analog, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Dacă $a_4 \neq 4$ atunci $\min S = 32$ și se realizează pentru $a_4 = 5$, $a_5 = 6$, $a_6 = 7$, $a_7 = 8$. Dacă $a_4 > 5$ atunci $\min S = 36 > 32$.

Dacă $a_4 = 4$, avem cazurile:

$$P = \{(1, 2, 3, 4, 5, 6, 11), (1, 2, 3, 4, 5, 7, 10), (1, 2, 3, 4, 5, 8, 9), (1, 2, 3, 4, 6, 7, 9)\}$$

pentru descompunerea pătratului în 7 dreptunghiuri (dacă acestea există). Cum în text se cere p-ul maximal și o singură partiție, o dăm:

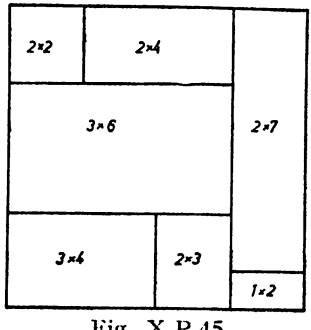


Fig. X.P.45

$a_1 = 1$ (pătratul 1×2);
$a_2 = 2$ (pătratul 2×2);
$a_3 = 3$ (pătratul 2×3);
$a_4 = 4$ (pătratul 2×4);
$a_5 = 6$ (pătratul 3×4);
$a_6 = 7$ (pătratul 2×7);
$a_7 = 9$ (pătratul 3×6).

PROBABILITĂȚI

XI.1.0. Definiții și propoziții.

Se numește *sistem complet de evenimente* o mulțime de evenimente A_k, $k = \overline{1, m}$, pentru care:

1°). $A_k \neq \phi$, $(\forall)\ k \in \overline{1, m}$,

2°). $A_k \cap A_j = \phi$, $(\forall)\ k, j \in \overline{1, m}$, $k \neq j$,

3°). $\bigcup_{k=1}^{m} A_k = E$.

XI.1.1. *Definiție.* Numim *probabilitate atașată unui eveniment* X, raportul dintre numărul cazurilor egal posibile care realizează evenimentul și numărul cazurilor egal posibile. Mai clar, dacă m este numărul cazurilor egal posibile care realizează evenimentul (sau, altfel spus, numărul cazurilor favorabile) și n este numărul cazurilor egal posibile, însemnăm probabilitatea evenimentului X prin:

$$P(X) = \frac{m}{n}.$$

Convenim să notăm în cele ce urmează prin $P(A)$ probabilitatea evenimentului A, notația fiind cîteodată afectată și de indici.

Exemple

1°). Care este probabilitatea ca aruncînd un zar, să obținem fața notată cu 6?

Soluție. Fie X evenimentul căruia vrem să-i aflăm probabilitatea. Numărul cazurilor favorabile este 1 deoarece zarul are o singură față notată cu 6 iar numărul cazurilor posibile este 6 deoarece zarul are 6 fețe. Potrivit definiției:

$$P(X) = \frac{1}{6}.$$

2°). Să complicăm problema: să considerăm două zaruri și ne întrebăm care este probabilitatea ca aruncîndu-le să obținem, adunînd punctele de pe fețe, un număr par?

Soluție. Numărul cazurilor posibile este $6 \cdot 6$ deoarece, la o aruncare, una din cele 6 fețe ale primului zar se poate combina cu oricare din cele 6 fețe ale celui de-al doilea zar. Suma minimă pe care o putem obține este 2 iar suma maximă este 12($1 + 1 = 2$ respectiv $6 + 6 = 12$). Pentru a obține un număr par trebuie să obținem sau suma egală cu 2 sau cu 4 sau cu 6 sau cu 8 sau cu 10 sau cu 12. Aceste sume se pot obține din combinațiile:

I°). $2 = 1 + 1$,

II°). $4 = 1 + 3$; $4 = 2 + 2$; $4 = 3 + 1$,

III°). $6 = 1 + 5$; $6 = 2 + 4$; $6 = 3 + 3$;
$6 = 4 + 2$; $6 = 5 + 1$,

IV°). $8 = 2 + 6$; $8 = 3 + 5$; $8 = 4 + 4$;
$8 = 5 + 3$; $8 = 6 + 2$,

V°). $10 = 4 + 6$; $10 = 5 + 5$; $10 = 6 + 4$,

VI°). $12 = 6 + 6$

care sînt în număr de 18. Deci probabilitatea căutată va fi:

$$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

3°). O urmă conține 7 bile albe, 3 negre și 2 roșii. Care este probabilitatea ca alegînd o bilă la întîmplare, aceasta să fie albă? Dar roșie?

Soluție. Numărul cazurilor favorabile pentru primul eveniment este 7 deoarece în urnă sînt 7 bile albe, iar numărul cazurilor posibile este 12 deci probabilitatea căutată este 7/12. În al doilea caz probabilitatea este $2/12 = 1/6$.

XI.1.2. Notăm cu K oricare din mulțimile R (asociată dreptei reale), R^2 (asociată planului), R^3 (asociată spațiului). Să considerăm două domenii D, d ale lui K. Probabilitatea ca un punct luat la întîmplare din domeniul D să aparțină lui d este firesc să o admitem proporțională cu măsura domeniului d (în R măsura unui domeniu—în acest caz un interval—se identifică, respectiv, cu lungimea intervalului, în R^2 cu aria figurii plane, iar în R^3 cu volumul corpului) adică:

$$P = k \text{ măs } d$$

(o analiză mai amplă poate include și justificarea acestei afirmații), k fiind un factor de proporționalitate.

Identificînd pe d cu D evident, probabilitatea ca luînd un punct la întîmplare din D, acesta să aparțină lui D este 1 deci:

$$1 = k \text{ măs } D$$

de unde:

$$k = \frac{1}{\text{măs } D}$$

adică:

$$P = \frac{\text{măs } d}{\text{măs } D}.$$

XI.2.0. Probabilități condiționate.

Fie A și B două evenimente astfel încît $P(A) > 0$. Raportul:

$$P(B/A) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad (1)$$

poartă numele de *probabilitatea evenimentului B, condiționată de A.*

Evident, $P_A(B) \geqslant 0$ deoarece $P(A \cap B) \geqslant 0$ (și, prin ipoteză, $P(A) > 0$).

Din distributivitatea intersecției față de reuniune, valabilă și la evenimente:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

A, B, C fiind trei evenimente oarecare, aplicînd formula (1) găsim:

$$P_A(B \cup C) = \frac{P[A \cap (B \cup C)]}{P(A)} = \frac{P[A \cap B) \cup (A \cap C)]}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C)$$

în ipoteza că evenimentele A și C sînt *incompatibile.*

De asemenea, tot din (1):

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \qquad (2)$$

schimbînd rolul evenimentelor astfel că, din (1) și (2) găsim:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (3)$$

Probabilitatea condiționată $P_B(A)$ reprezintă probabilitatea evenimentului A în ipoteza că B s-a realizat.

Exemplu. Pe o masă se găsesc trei cartonașe, colorate pe o parte și pe alta, astfel: un cartonaș are ambele fețe colorate în roșu, unul este colorat pe ambele fețe cu albastru iar al treilea are o față colorată cu roșu iar cealaltă cu albastru.

Alegînd la întîmplare un cartonaș constatăm că este colorat pe o parte cu roșu. Care este probabilitatea ca a doua față să fie colorată tot roșu?

Soluție. Însemnăm prin A evenimentul care constă în faptul că o față a unui disc este colorată în roșu iar prin B evenimentul ce constă în faptul că și a doua față este colorată tot cu roșu.

Avem de calculat probabilitatea:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Dar $P(A) = \frac{1}{2}$ (pentru că sînt trei fețe colorate în roșu, din șase) și $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ (sînt trei discuri dintre care numai unul cu ambele fețe colorate cu roșu).

Rezultă:

$$P_A(B) = \frac{2}{3}.$$

XI.3.0. Evenimente independente.

Două evenimente A_1 și A_2 sînt, prin definiție, *independente* dacă:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Dacă în formula (3) admitem $P_A(B) = P(B)$, adică probabilitatea evenimentului B nu depinde de A, obținem:

$$P_B(A) = P(A)$$

adică nici probabilitatea evenimentului A nu depinde de B.

Analog se definește și independența evenimentelor $A_1, \ldots, A_n$: evenimentele $A_1, \ldots, A_n$ sînt independente dacă pentru orice submulțime $\{i_k\}_{1 \leq i \leq}$ a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ are loc:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_l}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_l}).$$

Pentru ca evenimentele $A_1, \ldots, A_n$ să fie independente nu este suficient ca:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

pentru orice $i \neq j$. Ilustrăm acest lucru prin celebrul exemplu dat de *S. Bernștein*. Considerăm evenimen-

tul $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, format din 4 evenimente elementare și $A = \{e_1, e_2\}$, $B = \{e_1, e_3\}$, $C = \{e_1, e_4\}$.

Este clar că:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2};$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{4}$$

dar:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}.$$

În aplicații se mai poate folosi formula:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \bar{A}_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(\bar{A}_k) =$$

$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} [1 - P(A_k)] = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j \cap A_k) +$$

$$+ \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{i>j} P(A_i) \cdot P(A_j) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$$

în ipoteza că evenimentele A_k, $k = \overline{1, n}$, sînt independente. Această formulă se dovedește folosind legile lui *De Morgan*, relative la evenimente (în general, toate proprietățile relative la evenimente se păstrează de la mulțimi, considerînd evenimentul oarecare A drept o mulțime de evenimente elementare).

XI.4.0. Formule.

Se stabilește prin inducție că:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) \cdot P(A_1 | A_2) \cdot P(A_3 | A_1 \cap$$

$$\cap A_2) \ldots P\left(A_n \left| \bigcap_{k=1}^{n} A_k \right.\right)$$

dacă:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$$

iar dacă evenimentele sînt independente, atunci:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k),$$

fapt ce rezultă din definiție.

De asemenea:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

pentru două evenimente oarecare A și B.

Dacă $\{A_k\}$, $k = \overline{1, n}$, este un sistem complet de evenimente și B este un eveniment oarecare atunci are loc *formula probabilității totale:*

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + + \ldots + + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B).$$

În adevăr:

$$B = B \cap E = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$
$$(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots (A_n \cap B)$$

deoarece $\{A_k\}$, $k = \overline{1, n}$, este un sistem complet deci:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

și cum:

$$P(A_k \cap B) = P(A_k) \cdot P_{A_k}(B), \quad (\forall)\ k \in \overline{1, n}$$

rezultă afirmația.

Însă (vezi XI.2.0, (3)):

$$P_B(A_i) \cdot P(B) = P(A_i) \cdot P_{A_i}(B) = P(A_i \cap B)$$

deci:

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{P(B)}$$

adică, după formula probabilității totale:

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

adică *formula lui Bayes*. Ea se aplică în următoarea situație: în urma unei experiențe poate apare un eveniment B, dar acest eveniment poate apare ca efect a n evenimente $A_1, \ldots, A_n$ ce formează un sistem complet de evenimente, adică B poate apare odată cu unul și numai unul dintre evenimentele A_k, $k = \overline{1, n}$. Se cunosc probabilitățile *a priori* ale evenimentelor $A_1, \ldots, A_n$ și probabilitatea de apariție a evenimentului B ca efect al evenimentului A_k adică $P_{A_k}(B)$, $k = \overline{1, n}$.

Presupunînd că în urma experienței a apărut evenimentul B, formula lui *Bayes* permite aflarea probabilității ca evenimentul B să apară din cauza evenimentului A_k (odată cu A_k), pentru fiecare $k = \overline{1, n}$, adică probabilitatea *a posteriori* $P_B(A_k)$.

Exemple

1°). Fie trei urne u_1, u_2, u_3 astfel ca în u_1 să găsim trei bile albe și două negre, în u_2 două bile albe și patru negre, iar în u_3 trei bile albe și șapte negre.

Se extrage la întîmplare una din urne și se extrage din ea o bilă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă?

Soluție. Aplicăm formula probabilității totale. Fie X evenimentul ca bila să fie albă și A_k evenimentul

ca bila să fi fost extrasă din urna u_k, $k = \overline{1, 3}$. Atunci este clar că:

$$X = (A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X) \cup (A_3 \cap X)$$

deci:

$$P(X) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(X) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(X) +$$

$$+ P(A_3) \cdot P_{A_3}(X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{37}{90}.$$

2°). Să considerăm două urne M_1 și M_2 cu următoarele compoziții:

Urna	numărul de bile roșii	numărul de bile albe
M_1	1	2
M_2	5	1

Se extrage la întîmplare o bilă din urna M_1 și se introduce în cealaltă urnă și, după aceasta, se extrage o bilă din urna M_2.

Știind că bila extrasă din urna M_2 este albă, care este probabilitatea ca bila transferată să fi fost roșie?

Soluție. Fie K evenimentul ca bila extrasă din urna M_2 să fie albă și T_1 respectiv T_2 evenimentele ca bila transferată din urna M_1 în urna M_2 să fie albă, respectiv roșie. Sîntem într-un caz de aplicabilitate al formulei lui *Bayes*:

$$P_K(T_2) = \frac{P(T_2)P_{T_2}(K)}{P(T_1) \cdot P_{T_1}(K) + P(T_2)P_{T_2}(K)} = \frac{1}{5}$$

deoarece:

$$P(T_2) = \frac{1}{3}\ ;\ P_{T_2}(K) = \frac{1}{7} \text{ etc.}$$

XI.5.0. Scheme clasice de probabilitate.

XI.5.1. *Schema lui Bernoulli* (*schema binomială* sau încă *schema bilei revenite*). În urma efectuării unei experiențe, poate apare evenimentul A cu probabili-

tatea p, sau evenimentul contrar, A, cu probabilitatea $q = 1 - p$. Se repetă experiența de n ori, în condiții identice. Probabilitatea $P(n, m)$ ca în cele n experiențe evenimentul A să apară de m ori este:

$$P(n;m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

În felul acesta, probabilitatea ca aruncînd o monedă de 7 ori, stema să apară de 3 ori este:

$$P(7;3) = C_7^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-3}.$$

XI.5.2. *Schema lui Bernoulli cu mai multe stări (schema polinomială).* În urma unei experiențe poate apare unul și numai unul dintre evenmentele A_k, $k = \overline{1, t}$, care formează un sistem complet de evenimente. Fie $p_k = P(A_k)$, $k = \overline{1, t}$, deci $\sum_{k=1}^{t} p_k = 1$.

Se repetă experiența de n ori, în condiții identice. Probabilitatea $P(n; m_1, \ldots, m_t)$ ca în cele n experiențe evenimentul A_k să apară de m_k ori, $k = \overline{1, t}$, este:

$$P(n; m_1, \ldots, m_t) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_t!} p_1^{m_1} \ldots p_t^{m_t}$$

$\left(\text{este clar că } \sum_{k=1}^{t} m_k = n\right)$.

Astfel, aruncînd un zar de 9 ori, probabilitatea ca fața 1 să apară o dată, fața 2 de trei ori, fața 3 de două ori, fețele 4, 5, 6 cîte o singură dată este:

$$P(9; 1, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{9!}{1!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!} \left(\frac{1}{6}\right)^9 = \frac{7!}{6^8}.$$

XI.5.3. *Schema lui Poisson.* Fie n experiențe independente. În urma experienței de rang k poate apare evenimentul A cu probabilitatea p_k sau evenimentul contrar $\overline{A}$ cu probabilitatea $q_k = 1 - p_k$, $k = \overline{1, n}$. Probabilitatea P_m ca în cele n experiențe evenimen-

tul A să apară de m ori este egală cu coeficientul lui x^m din polinomul:

$$P(x) = (p_1x + q_1) \dots (p_nx + q_n).$$

Schema de față se poate realiza considerînd n urne cu bile de două culori, cu compoziții oarecare (numeric), extrgîndu-se din fiecare cîte o bilă.

XI.5.4. *Schema bilei nerevenite.* Fie U o urnă ce conține a bile albe și b bile negre. Se fac $n \leqslant a + b$ extracții succesive (fără a mai pune bila extrasă înapoi). Probabilitatea $P_{a,b}$ (u, v) ca u din bilele extrase să fie albe și v să fie negre $(u + v = n)$ este:

$$P_{a,b}(u, v) = \frac{C_a^u C_b^v}{C_{a+b}^{u+v}}.$$

XI.5.5. *Schema generalizată a bilei nerevenite.* Într-o urnă se găsesc N_0 bile de $k \geqslant 1$ culori, anume N_1 bile de culoarea 1, N_2 bile de culoarea 2, ..., N_k bile de culoarea k, $N_1 + \dots + N_k = N_0$. Se fac n extracții succesive fără să se pună bila extrasă înapoi în urnă. Probabilitatea $P_{N_1, \dots, N_k}(n_1, \dots, n_k)$ să avem $n_1, \dots, n_k$ bile de culorile 1, 2, ..., k respectiv, $n_1 + \dots + n_k = n$, este:

$$P_{N_1, N_2, \dots, N_k}(n_1, \dots, n_k) = \frac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} \dots C_{N_k}^{n_k}}{C_{N_1 + \dots + N_k}^{n_1 + \dots + n_k}}.$$

PROBLEME REZOLVATE

XI.R.1. Doi arcași trag la o aceeași țintă, cu probabilitățile de a atinge ținta de 1/4 și respectiv 2/3. Care este probabilitatea ca ținta să fie doborîtă?

Soluție. Fie A evenimentul ca primul arcaș să atingă ținta și, de asemenea, B evenimentul ca al doilea arcaș

să atingă ținta. Evenimentul ca ținta să fie doborîtă este $A \cup B$ și deci probabilitatea cerută este:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3+8-2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

XI.R.2. O urnă conține 3 bile albe și 2 negre. Se extrag la întîmplare 3 bile.

a°). Care este probabilitatea ca cele trei bile să fie albe?

b°). Dar două albe și una neagră?

Soluție. Aplicăm schema bilei nerevenite:

a°). $p_1 = \frac{C_3^3 C_2^0}{C_5^3} = \frac{1}{10}$;

b°). $p_2 = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5}$.

XI.R.3. Două urne conțin cîte 6 bile numerotate 1, 3, 3, 5, 5, 5 respectiv 2, 4, 4, 6, 6, 6. Se extrage la întîmplare cîte o bilă din fiecare urnă.

a°). Care este probabilitatea ca bilele extrase să poarte numerele 4, 5?

b°). Care este probabilitatea ca suma numerelor de pe bilele extrase să fie strict mai mare decît 7?

Soluție. a°). Probabilitatea ca pe bilele extrase să se găsească numerele 4 și 5 este:

$$p_a = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6};$$

deoarece probabilitatea ca pe bila extrasă din prima urnă să se găsească înscris numărul 5 este 3/6, iar probabilitatea ca pe bila extrasă din a doua urnă să se găsească numărul 4 este 2/6.

b°). Cazurile în care suma numerelor bilelor extrase depășește 7 sînt în număr de 3, anume cînd avem situațiile:

$$(3, 6),\ (5, 4),\ (5, 6),$$

și cărora le corespund probabilitățile:

$$p_1 = \frac{2}{6}\,\frac{3}{6} = \frac{1}{6},$$

$$p_2 = \frac{1}{6} = p_a,$$

$$p_3 = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{4}.$$

În concluzie, probabilitatea cerută este:

$$p_b = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12}.$$

XI.R.4. O întreprindere livrează către un beneficiar un lot de agregate, ce conțin 0,4% rebuturi. Durata medie de funcționare a acestor agregate reprezintă 44,2% din durata maximă de funcționare.

Știind că dintre agregatele utilizate, 60% depășesc durata medie de funcționare, să se calculeze probabilitatea ca alegînd la întîmplare un agregat, acesta să depășească durata medie de funcționare.

Soluție. Însemnînd prin X evenimentul ca agregatul extras să nu fie rebut iar prin Y evenimentul ca agregatul extras să depășească durata medie de funcționare, evenimentul a cărui probabilitate se cere este $X \cap Y$ și probabilitatea căutată este:

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P_X(Y) = 0{,}996 \cdot 0{,}60 = 0{,}5976.$$

XI.R.5. Considerăm o urnă în care avem 10 bile albe, 6 albastre și 7 negre. Se extrag 7 bile.

a°). Care este probabilitatea ca 5 dintre ele să fie albe și două albastre?

b°). Care este probabilitatea ca 3 din ele să fie albe, două albastre și două negre?

Soluție. Aplicăm schema generalizată a bilei nerevenite. În cazul a°):

$$P_a = \frac{C_{10}^5 C_6^2 C_7^0}{C_{23}^7}.$$

În cazul b°):

$$P_b = \frac{C_{10}^3 C_6^2 C_7^2}{C_{23}^7}.$$

XI.R.6. (Problema lui *Banach*). O persoană are într-un buzunar două cutii cu chibrituri. Ori de cîte ori are nevoie de un chibrit, folosește, la întîmplare, oricare din cutiile din buzunar. După un anumit timp constată că una din cutii este goală. Care este probabilitatea ca în acel moment în a doua cutie să se găsească exact k chibrituri, știind că numărul inițial al chibriturilor în fiecare cutie a fost n?

Soluție. Reproducem, cu unele modificări de text, pentru eleganța ei, soluția dată de *A. M. Iaglom* și *I. M. Iaglom* în celebra lor carte, *Probleme neelementare tratate elementar (Editura tehnică, București, 1962).*

În momentul în care persoana constată că respectiva cutie de chibrituri scoasă din buzunar este goală, a doua cutie poate să nu conțină nici un chibrit (adică să fie de asemenea goală), un chibrit, două chibrituri, trei chibrituri etc., pînă la n chibrituri inclusiv. Experiența considerată constă în aceea că persoana scoate de mai multe ori la întîmplare cîte un chibrit dintr-o cutie sau din cealaltă, pînă cînd una dintre ele se va goli. În acest caz, numărul total de chibrituri scoase în diferitele etape ale experienței va fi, desigur, diferit; de aceea diferitele rezultatele nu vor fi egal posibile și nu pot fi folosite pentru calculul probabilității. Această dificultate poate fi înlăturată

cu ajutorul unui raționament deosebit: vom considera că în momentul în care cutia scoasă va fi goală, persoana o umple din nou (practic acest lucru poate fi realizat, de exemplu, înlocuind cutia goală cu o cutie plină) și continuă să ia mai departe cîte un chibrit la întîmplare dintr-o cutie sau alta. Vom conveni să considerăm că această extragere succesivă a chibriturilor se oprește după scoaterea celui de-al $(2n + 1)$-lea chibrit; deoarece inițial ambele cutii au conținut în total $2n$ chibrituri, este clar că în acest moment cel puțin una dintre cutii va fi goală (și va fi umplută din nou). Acum putem formula din nou problema pusă în modul următor: o persoană scoate de $2n + 1$ ori la rînd cîte un chibrit dintr-una din cele două cutii, iar probabilitatea de a lua de fiecare dată un chibrit dintr-o cutie sau alta este aceeași. Numărul de chibrituri din fiecare cutie poate fi considerat nemărginit (deoarece am convenit să umplem cutia goală din nou). Într-un moment oarecare, persoana a scos pentru prima oară al $(n + 1)$-lea chibrit dintr-una din cutii (în prima formulare aceasta ar fi însemnat că el a găsit cutia goală); care este probabilitatea ca în acel moment din cutia a doua să fi fost scoase $n - k \geqslant 0$ chibrituri?

În noua formulare, problema se rezolvă foarte simplu. La fiecare extracție, în parte, se pot prezenta, evident, două cazuri (chibritul poate fi extras din prima sau din a doua cutie); la $2n + 1$ extracții succesive se pot prezenta 2^{2n+1} cazuri diferite. Acesta este chiar numărul total al cazurilor egal posibile în experiența considerată. Cazuri favorabile vor fi acelea în care primele $2n - k$ extracții vor fi scoase n chibrituri din prima cutie și $n - k$ din a doua, iar al $(2n - k + 1)$-lea chibrit va fi din nou scos din prima cutie; sau, dimpotrivă, în primele $2n - k$ extracții, n chibrituri vor fi scoase din a doua cutie și $n - k$ din prima iar în a $(2n - k + 1)$-a extracție, chibritul va fi scos, de asemenea, din a doua; rezultatele ultimelor k extracții pot fi în acest caz oarecare. Însă numărul cazurilor în $2n - k$ extracții în care n chibrituri sînt scoase din

prima cutie iar $n - k$ din a doua este egal cu C_{2n-k}^{n}. Asociind aceste cazuri cu 2^k posibile cazuri din ultimele k probe, vom găsi că numărul de cazuri în care $n + 1$ chibrituri sînt scoase mai întîi din prima cutie, din a doua cutie fiind scoase în acest moment $n - k$ bețe de chibrit, este egal cu $2^k \cdot C_{2n-k}^{2}$. Tot atîtea vor fi și cazurile, în care al $(n + 1)$-lea chibrit va fi scos pentru prima oară din a doua cutie, iar din prima cutie vor fi scoase în acel moment $n - k$ bețe de chibrit. Deci numărul total al cazurilor favorabile ale experienței este:

$$2C_{2n-k}^{n} \cdot 2^k = 2^{k+1} \cdot C_{2n-k}^{n}.$$

Deci probabilitatea cerută este:

$$p = \frac{2^{k+1} C_{2n-k}^{n}}{2^{2n+1}} = \frac{C_{2n-k}^{n}}{2^{2n-k}}.$$

Generalizăm problema[1]: să considerăm $k \geqslant 2$ cutii, $S_1, S_2, \ldots, S_k$, fiecare conținînd n chibrituri. Ori de cîte ori avem nevoie luăm un chibrit dintr-o cutie aleasă la întîmplare. După un anumit timp constatăm că luînd o cutie, aceasta conține n_1 chibrituri. Să aflăm probabilitatea ca în acel moment în celelalte cutii să fie $n_2, n_3, \ldots, n_k$ bețe de chibrit, $n_1 < n_i$, $i \in \overline{2, k}$.

Ne bazăm pe același raționament făcut anterior, presupunînd deci că $S_1, S_2, \ldots, S_k$ au un număr nelimitat de chibrituri (le putem reumple). Ori de cîte ori avem nevoie, luăm un chibrit dintr-o cutie aleasă la întîmplare. Ne întrebăm — reformulînd dar — care este probabilitatea ca în momentul în care lipseau $n - n_1$ chibrituri (deci la a $(n - n_1 + 1)$-a probă) din celelalte cutii să fie scoase $n - n_2$, $n - n_3, \ldots$, $n - n_k$ bețe de chibrit.

Fie, pentru aceasta:

$$N_1 = \sum_{i=1}^{k} (n - n_i)$$

numărul de chibrituri ce trebuie scoase.

[1] Generalizare dată de Attila Darvas, în G.M.B, nr. 4/1972, p. 232.

Trebuie să facem $N_1 + 1$ probe, în $k \geqslant 2$ cutii, deci numărul cazurilor posibile este k^{N_1+1}.

Cazuri favorabile sînt acelea în care:

$n - n_1$ din cele N_1 vor fi scoase dintr-o cutie $(C_{N_1}^{n-n_1})$.
$n - n_2$ din cele $N_2 = N_1 - (n - n_1)$ vor fi scoase dintr-o altă cutie $(C_{N_2}^{n-n_2})$,

$\dot{n} - \dot{n}_i$ din cele N_i vor fi scoase din alta $\left(C_{N_i}^{n-n_i}\right)$,
$n - n_k$ din cele N_k vor fi scoase din cutia rămasă $\left(C_{N_k}^{n-n_k}\right)$.

Ultima încercare va fi în prima cutie considerată, deci cazul k.

Deci:

$$P = \frac{k\prod_{i=1}^{k} N_1^{n-n_i}}{k^{N_1+1}} = \frac{\prod_{i=1}^{k} N_1^{n-n_i}}{k^{N_1}}.$$

XI.R.7. Luînd la întîmplare un număr n, care este probabilitatea că pătratul său să se termine în 56?

(M. Neacşu, G.M.B, 11538)

Soluție. Fie $n = 10\,a_0 + a_1$, $a_0, a_1 \in \overline{0, 9}$, un număr natural de două cifre. Atunci:

$$n^2 = 10^2 a_0^2 + 2 \cdot 10 a_0 a_1 + a_1^2$$

deci ultimele două cifre ale lui n^2 sînt date de:

$$2 \cdot 10 \cdot a_0 a_1 + a_1^2.$$

Cercetînd toate cazurile posibile, găsim numere 16, 34, 66 și 84.

Dacă însă considerăm acum un număr oarecare T în baza zece cu cel puțin două cifre:

$$T = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \cdot 10^{n-k} + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$$

unde:

$a_k \in \overline{0, 9}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Notînd $A = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \cdot 10^{n-k}$ obținem:

$$T^2 = A^2 + 2A\,(a_{n-1} \cdot 10 + a_n) + (a_{n-1} \cdot 10 + a_n)^2$$

unde ultimele două cifre sînt date de expresia:

$$(a_{n-1} \cdot 10 + a_n)^2.$$

Deducem că numărul T are pătratul terminat în 56 dacă numărul format cu ultimele sale două cifre are pătratul terminat în 56.

Probabilitatea căutată este deci:

$$P = \frac{4}{100} = 0{,}04.$$

XI.R.8. Fiecare coeficient al ecuației:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se determină prin aruncarea unui zar și atribuirea numărului de puncte obținut. Care este probabilitatea ca ecuația astfel obținută să aibă rădăcini egale? Dar distincte?

Soluție. Experienței prin care determinăm un coeficient îi atașăm variabila aleatoare cu tabloul de distribuție:

$$x\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Fie x_1, x_2, x_3 variabilele aleatoare corespunzătoare determinării coeficienților a, b, c. Aceste variabile sînt independente deci probabilitatea ca ecuația să admită rădăcini egale este:

$$P_1 = P(x_2^2 - 4x_1x_3 = 0) = P(x_2^2 = 4x_1x_3) =$$

$$= \sum_k P\left(x_2^2 = k)P(x_1x_3 = k \mid 4\right) = \frac{1}{6}\sum_k P(x_1x_3 = k/4\Big),$$

suma efectuîndu-se după acele numere $k \in N^*$ care sînt valori ale variabilei aleatoare x_2^2 (deci 1, 2, 4, 9, 16, 25, 36) și, în plus, numărul respectiv este divizibil cu 4 (deoarece variabila x_1x_3 ia valori întregi și trebuie deci ca, respectiv $k/4 \in N^*$).

Urmează deci că variabila k poate lua valorile 4, 16, 36.

Însă:

$$P_1 = \frac{1}{6}[P(x_1x_3 = 1) + P(x_1x_3 = 4) + P(x_1x_3 = 9)].$$

$$P(x_1x_3 = 1) = P[(x_1 = 1) \cap (x_3 = 1)] =$$

$$= P(x_1 = 1) \cdot P(x_3 = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^2},$$

$$P(x_1x_3 = 4) = P[((x_1 = 1) \cap (x_3 = 4)) \cup ((x_1 = 2) \cap$$

$$\cup (x_3 = 2)) \cup ((x_1 = 4) \cap (x_3 = 1))] = P((x_1 = 1) \cap$$

$$\cap (x_3 = 4)) + P((x_1 = 2) \cap (x_3 = 2)) + P((x_1 = 4) \cap$$

$$\cap (x_3 = 1)) = P(x_1 = 1)\ P(x_3 = 4) + P(x_3 = 2) \times$$

$$\times P(x_1 = 2) + P(x_1 = 4)\ P(x_3 = 1) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{6^2}$$

și:

$$P(x_1x_3 = 9) = P((x_1 = 3) \cap (x_3 = 3)) = \frac{1}{6^2}$$

deci:

$$P_1 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{3}{6^2}\right) = \frac{5}{6^3}.$$

PROBLEME PROPUSE

XI.P.1*. Dintr-o urnă în care se găsesc N_1 bile numerotate 1, ..., N_1 se extrag $n \geqslant 1$ bile. Fie:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

numerele înscrise pe bilele extrase, dispuse în ordine crescătoare.

Considerînd extrgerile cu și fără întoarcere, să se calculeze:

a°). $P(X_m = M)$;

b°). $P(X_m > M)$;

c°). $P(X_m \leqslant M)$;

d°). $P(X_m < M)$;

e°). $P(X_m \geqslant M)$;

f°). $P(M_1 \leqslant X_m \leqslant M_2)$.

XI.P.2[2]. O urnă conține a bile albe și b bile negre. Din urnă se scot, cîte una, $x + y$ bile, fie:

a°). punîndu-se de fiecare dată bila extrasă înapoi.

b°). nepunîndu-se niciodată bila extrasă înapoi.

Se notează cu p_1 respectiv p_2 probabilitățile obținerii de x bile albe și y bile negre în variantele a°), respectiv b°).

Să se arate că dacă $a = b$ și $x = y$ atunci $p_1 \leqslant p_2$.

(Concurs elevi, etapa finală, 1974)

XI.P.3*. *(Problema acului)*. Pe o masă se trasează paralele echidistante .Fie h distanța dintre aceste paralele. Se aruncă pe masă un ac foarte subțire a cărui lungime este l. Să se găsească probabilitatea ca acul să intersecteze:

1°). exact o linie dacă $l < h$;

2°). exact o linie dacă $l = h$;

3°). cel puțin o linie dacă $l > h$.

XI.P.4*. Fie segmentul M_0M_n de lungime $l > 0$. Pe el se aleg $n - 1$ puncte, în mod arbitrar, distincte între ele și distincte de extremitățile segmentului, notate $M_1, \ldots, M_{n-1}$.

Care este probabilitatea ca, respectiv, cu segmentele $M_k M_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$ să putem forma un poligon cu n laturi, $n \geqslant 3$?

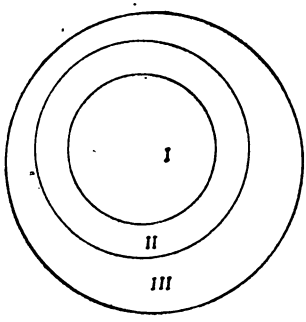


Fig. XI.P.5

XI.P.5[3]. Un arcaș trage asupra unei ținte (vezi fig. XI.P.5) 6 săgeți.

Se știe că, pentru ca zona I să fie atinsă, sînt suficiente 3 săgeți.

Cunoscînd că probabilitatea ca o săgeată care nimerește ținta atinge zona I cu probabilitatea de $\frac{1}{2^5}$, să se calculeze probabilitatea ca cel puțin o săgeată, din cele 6, să atingă zona I.

XI.P.6. Care este probabilitatea ca alegînd un număr din mulțimea numerelor naturale, acesta să fie cub perfect și de forma $2k + 5$, $k \in N$?

XI.P.7*. Care este probabilitatea ca într-o grupă de n persoane, alcătuindu-se $m \leqslant n$ colective cu sarcini diferite, fiecare persoană să facă parte din cel puțin un colectiv?

(N.R. Gologan, G.M.B, 9958)

XI.P.8[3]. O urnă conține n bile numerotate $1, 2, \ldots, n$; cerem unei persoane să aleagă un număr și să extragă din urnă m bile printre care și cea cu numărul ales.

Care este probabilitatea ca numai din două extrageri de acest fel să poată fi dedus numărul ales?

(Cornel Marinescu, G.M.B, 9959)

XI.P.9*. Un segment de lungime l este împărțit la întîmplare în patru părți.

Care este probabilitatea ca oricare din cele patru segmente să fie mai mici decît un segment de lungime dată a?

INDICAȚII

XI.P.1*. Se observă o legătură între probabilitățile cerute.

XI.P.2[2]. Se calculează probabilitățile evenimentelor în fiecare din cazurile respective și se arată că:

$$f(x+1) > f(x)$$

unde:

$$f(x) = 2^{2x} C_{2(a-x)}^{a-x}.$$

XI.P.3*. Se aplică raționamente geometrice.

XI.P.5[3]. Se folosește formula probabilității totale.

XI.P.7*. Probabilitatea cerută este:

$$P = \frac{K_{2^m-1}^{n}}{K_{2^n-1}^{m}},$$

unde K_m^n reprezintă numărul combinărilor cu repetiție de m obiecte luate cîte n. Explicați însă rezultatul.

SOLUȚII

XI.P.1*. Să presupunem că extragerile se fac cu întoarcerea bilei în urnă.

Evenimentul $x_m > M$ înseamnă că $m-1$ extrageri se fac dintre bilele numerotate cu 1, 2,..., M și $n-m+1$

extrageri dintre bilele numerotate cu $M+1, \ldots, N_1$, deci pentru $m-1$ extrageri sînt M cazuri favorabile iar pentru $n-m+1$ extrageri sînt $N_1 - M$ cazuri favorabile. Pentru fiecare extragere în parte sînt N_1 cazuri posibile. Făcîndu-se n extrageri independente, probabilitatea căutată este produsul probabilităților corespunzătoare ficcărei extrageri, deci:

$$P(X_m > M) = \left(\frac{M}{N_1}\right)^{m-1} \left(\frac{N_1 - M}{N_1}\right)^{n-m+1} =$$

$$= \frac{M^{m-1}(N_1 - M)^{n-m+1}}{N_1^n}.$$

Dar:

$$P(X_m > M) = P(X_m = M+1) +$$
$$+ P(X_m = M+2) + \ldots + P(X_m = N_1)$$

iar:

$$P(X_m > M-1) = P(X_m = M) +$$
$$+ P(X_m = M+1) + \ldots + P(X_m = N_1)$$

de unde, prin scădere:

$$P(X_m = M) = P(X_m > M-1) - P(X_m > M) =$$
$$= \frac{(M-1)^{m-1}(N_1 - M + 1)^{n-m+1}}{N_1^n} -$$
$$- \frac{M^{m-1}(N_1 - M)^{n-m+1}}{N_1^n}.$$

Mai departe:

$$P(X_m \leqslant M) = 1 - P(X_m > M) =$$
$$= 1 - \frac{M^{m-1}(N_1 - M)^{n-m+1}}{N_1^n}.$$

Evenimentul $X_m < M$ înseamnă că m extrageri se fac dintre bilele numerotate cu 1, 2, ..., $M-1$ și $n-m$

extrageri se fac dintre bilele numerotate cu M, $M+1$, ..., N_1, deci judecînd ca mai sus:

$$P(X_m < M) = \frac{(M-1)^m}{N_1^m} \cdot \frac{(N_1 - M + 1)^{n-m}}{N_1^{n-m}} =$$

$$= \frac{(M-1)^m (N_1 - M + 1)^{n-m}}{N_1^n}.$$

În continuare:

$$P(X_m \geqslant M) = 1 - P(X_m < M) =$$

$$= 1 - \frac{(M-1)^m (N_1 - M + 1)^{n-m}}{N_1^n}$$

și:

$$P(M_1 \leqslant X_m \leqslant M_2) = [P(X < M_2) - P(X_m < M_1)].$$

Să admitem acum că extragerile se fac fără întoarcerea bilei în urnă.

a°). Probabilitatea cerută este:

$$P = \frac{C_{M-1}^{m-1} C_{N_1-M}^{n-m}}{C_{N_1}^n}.$$

În adevăr, sînt $C_{N_1}^n$ cazuri posibile, iar numărul cazurilor favorabile îl găsim astfel: sînt C_{M-1}^{m-1} cazuri de extragere a celor $m-1$ bile cu numere mai mici decît M (se extrag $m-1$ bile dintre $M-1$ bile, numerotate $1, 2, \ldots, M-1$, apoi un singur caz de extragere a bilei numerotate cu M și $C_{N_1-M}^{n-m}$ cazuri de extragere a $n-m$ dintre N_1-M bile, numerotate cu $M+1, M+2, \ldots, N_1$); combinînd în toate modurile posibile cazurile favorabile obținem în total $C_{M-1}^{m-1} C_{N_1-M}^{n-m}$.

Să observăm că $P(X_m = M) \neq 0$ pentru:

$$m \leqslant M \leqslant N_1 - n + m.$$

b°). $P(X_m > M) = P(X_m = M+1) + P(X_m = M+2) + \ldots + P(X_m = N_1)$

dar $P(X_m = k) \neq 0$ numai pentru:

$$m \leqslant k \leqslant N_1 - n + m$$

deci:

$$P(X_m > M) = \sum_{k=\max(m,\ M+1)}^{N_1-n+m} \frac{C_{k-1}^{m-1} C_{N_1-1}^{n-m}}{C_{N_1}^{n}}.$$

c°). Probabilitatea evenimentului căutat este:

$$P(X_m \leqslant M) = 1 - P(X_m > M) =$$

$$= 1 - \sum_{k=\max(m,\ M+1)}^{N_1-n+m} \frac{C_{k-1}^{m-1} C_{N_1-k}^{n-m}}{C_{N_1}^{n}}.$$

d°). Încă:

$$P(X_m < M) = P(X_m = 1) + P(X_m = 2) + \ldots +$$

$$+ P(X_m = M-1) = \sum_{k=m}^{\min(N_1-n+m,\ M-1)} \frac{C_{k-1}^{m-1} C_{N_1-k}^{n-m}}{C_{N_1}^{n}}.$$

e°), f°). În fine:

$$P(X_m \geqslant M) = 1 - P(X_m < M) =$$

$$= 1 - \sum_{k=m}^{\min(N_1-n+m,\ M-1)} \frac{C_{k-1}^{m-1} C_{N_1-k}^{n-m}}{C_{N_1}^{n}};$$

$$P(M_1 \leqslant X_m \leqslant M_2) = \sum_{k=M_1}^{M_2} P(X_m = k) =$$

$$= \sum_{k=M_1}^{M_2} \frac{C_{k-1}^{m-1} C_{N_1-k}^{n-m}}{C_{N_1}^{n}}.$$

XI.P.2². Avem, potrivit schemei lui *Bernoulli*:

$$p_1 = C_{x+y}^{x} \left(\frac{a}{a+b}\right)^x \left(\frac{b}{a+b}\right)^y$$

și:

$$p_2 = \frac{C_a^x C_b^y}{C_{b+a}^{x+y}}$$

potrivit schemei bilei neîntoarse. Însă:

$$p_1 = \frac{(x+y)!}{x!\,y!} \cdot \frac{a^x b^y}{(a+b)^{x+y}}$$

respectiv:

$$p_2 = \frac{a!b!}{(a-x)!\,(b-y)!} \cdot \frac{(x+y)!\,(a+b-x-y)!}{x!\,y!\,(a+b)!}$$

deci avem de comparat expresiile:

$$\frac{(x+y)!}{x!\,y!} \cdot \frac{a^x b^y}{(a+b)^{x+y}}$$

și:

$$\frac{a!b!}{(a-x)!\,(b-y)!} \cdot \frac{(x+y)!\,(a+b-x-y)!}{x!\,y!\,(a+b)!}$$

deci, simplificînd, trebuie studită comparația:

$$\frac{a^x b^y}{x!\,y!\,(a+b)^{x+y}} \sim \frac{a!\,b!}{(a-x)!\,(b-y)!} \cdot \frac{(a+b-x-y)!}{(a+b)!}$$

sau încă:

$$C_{a+b}^{a} \sim \frac{(a+b-x-y)!}{(a-x)!\,(b-y)!} \cdot \frac{(a+b)^{x+y}}{a^x b^y} =$$

$$= \frac{(a+b)^{x+y}}{a^x b^y}\, C_{a+b-x-y}^{a-x}.$$

Presupunînd $a = b$, $x = y$ trebuie deci să arătăm că:

$$C_{2a}^{2} > \frac{(2a-2x)!}{[(a-x)!]^2} \cdot \frac{(2a)^{2x}}{a^{2x}} = \frac{(2a)^{2x}}{a^{2x}} C_{2(a-x)}^{a-x} = 2^{2x} C_{2(a-x)}^{a-x}.$$

Fie:

$$f(x) = 2^{2x} C_{2(a-x)}^{a-x}.$$

Inegalitatea de demonstrat se scrie deci:

$$f(x) \geqslant f(0), \quad (\forall)\ x \in [0,\ a].$$

Dar:

$$f(x+1) > f(x).$$

În adevăr, inegalitatea:

$$2^{2(x+1)} C_{2(a-x-1)}^{a-x-1} > 2^x C_{2(a-x)}^{a-x}$$

este echivalentă cu:

$$2^2 C_{2(a-x-1)}^{a-x-1} > C_{2(a-x)}^{a-x}$$

sau:

$$2^2 > \frac{C_{2(a-x)}^{(a-x)}}{C_{2(a-x-1)}^{a-x-1}} = \frac{[2(a-x)]!}{[(a-x)!]^2} \cdot \frac{[(a-x-1)!]^2}{[2(a-x-1)]!} =$$

$$= \frac{(2a-2x-1)\,(2a-2x)}{(a-x)^2} = \frac{2(2a-2x-1)}{a-x}$$

deci cu:

$$2(a-x) > 2a-2x-1$$

sau:

$$0 > -1$$

evident. Egalitate pentru $x = 0$.

XI.P.3*. a°). Fie x distanța dintre mijlocul acului și cea mai apropiată paralelă, $x = OP$ (vezi fig. XI.P.3.1). Fie, de asemenea ψ unghiul dintre OP și ac.

Este clar că mulțimea cazurilor posibile este dată de mulțimea punctelor planului de coordonate φ și x care îndeplinesc condițiile:

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{h}{2}$$

$$0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

deci este reprezentată prin dreptunghiul $OABC$ (vezi fig. XI.P.3.2) în care:

$$OA = \frac{\pi}{2}, \quad OC = \frac{h}{2}.$$

Aria acestui dreptunghi este:

$$A_p = \frac{h\pi}{4}.$$

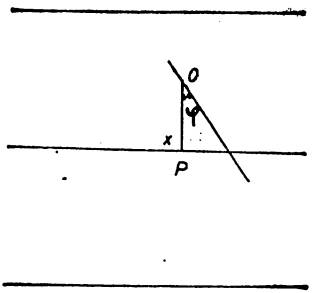
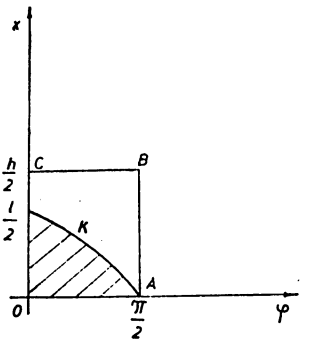


Fig. XI.P.3.1



$$K : x = \frac{l}{2}\cos\varphi$$

Fig. XI.P.3.2

În altă ordine a ideilor, observăm că acul intersectează o linie atunci cînd este indeplinită inegalitatea:

$$x < \frac{l}{2}\cos\varphi$$

astfel că mulțimea cazurilor favorabile este reprezentată prin domeniul haşurat în figura XI.P.3.2, a cărui arie este:

$$A_f = \frac{l}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{l}{2}$$

deci probabilitatea căutată este:

$$P = \frac{A_f}{A_p} = \frac{l/2}{h\pi/4} = \frac{2l}{h\pi}. \tag{1}$$

Vom soluționa întîi întrebarea 3°). Evenimentul a cărui probabilitate vrem să o determinăm se poate realiza prin două evenimente incompatibile:

a°). acul intersectează exact o linie;

b°). acul intersectează cel puțin două linii.

În ambele cazuri fixăm poziția acului ca la punctul precedent. Mulțimea cazurilor posibile este aceeași pentru ambele evenimente, anume reprezentată prin dreptunghiul $OABC$, de arie:

$$A_p = \frac{h\pi}{4};$$

Pentru ca acul să intersecteze exact o linie este necesar ca:

$$x \leqslant \frac{l}{2} \cos \varphi$$

dar:

$$\frac{l}{2} \cos \varphi \leqslant \frac{h}{2}. \tag{2}$$

Fie φ_0 soluția ecuației:

$$\frac{l}{2} \cos \varphi = \frac{h}{2}.$$

Unghiul φ_0 satisfăcînd restricțiilor problemei, deci:

$$\cos \varphi_0 = \frac{h}{l} \tag{3}$$

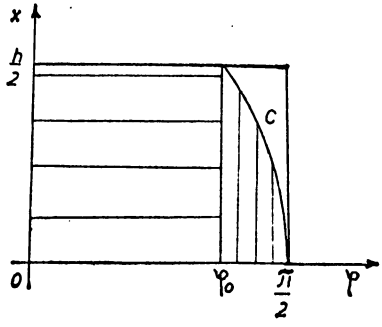
obținem că, din (2):

$$\cos \varphi \leqslant \cos \varphi_0$$

deci $\varphi \geqslant \varphi_0$.

Ca atare, mulțimea cazurilor favorabile este reprezentată în figura XI.P.3.3 prin domeniul haşurat vertical, a cărui arie este:

$$A_f = \frac{l}{2}\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{l}{2}(1 - \sin\varphi_0).$$



$$C: x = \frac{l}{2}\cos\varphi$$

Fig. XI.P.3.3

Pentru ca acul să interesecteze cel puțin două linii este necesar ca:

$$x \leqslant \frac{l}{2}\cos\varphi$$

dar:

$$\frac{l}{2}\cos\varphi \geqslant \frac{h}{2}. \qquad (4)$$

Găsim, și în acest caz:

$$\cos\varphi \geqslant \cos\varphi_0$$

deci $\varphi \leqslant \varphi_0$ și mulțimea cazurilor favorabile se reprezintă în fig. XI.P.3.3 prin domeniul haşurat orizontal, de arie:

$$A_f' = \frac{h\varphi_0}{2}.$$

De aici, probabilitatea căutată:

$$P = \frac{A_f}{A_p} + \frac{A_f'}{A_p} = 2l\,\frac{1 - \sin\left(\arccos\dfrac{h}{l}\right)}{h\pi} + \frac{2\arccos\dfrac{h}{l}}{\pi}.$$

2°). Dacă $l = h$ atunci $\cos\varphi_0 = 1$ deci $\varphi_0 = 0$, $\sin\varphi_0 = 0$ și formula precedentă se reduce la:

$$p = \frac{2}{\pi},$$

probabilitate care, după cum se vede, nu depinde, de l și h.

XI.P.4*. Pentru ca, respectiv cu segmentul $M_k M_{k+1}$, $k = 0, \ldots, n-1$, să putem forma un poligon cu n laturi trebuie oricare ar fi $k \in \overline{0, n-1}$, să aibă loc:

$$M_0M_{k+1} < M_0M_1 + \ldots + M_{k-1}M_k + M_{k+1}M_{k+2} + \ldots + M_{n-1}M_n$$

sau:

$$2M_kM_{k+1} < M_0M_1 + \ldots + M_{n-1}M_n = l$$

de unde:

$$M_kM_{k+1} < \frac{l}{2}.$$

Să calculăm acum probabilitatea ca segmentul M_iM_{i+1}, $i \in \overline{0, n-1}$, să fie mai mare decît $\frac{l}{2}$.

Trebuie studiate cazurile:

1°). Punctul M_{i-1} a fost ales pe a doua jumătate a segmentului M_0M_n (de pe NM_n, N fiind mijlocul segmentului M_0M_n).

În acest caz este evident că oricare ar fi poziţiile celorlalte $n-2$ puncte alese, segmentul $M_{i-1}M_i$

nu poate fi mare ca $\frac{l}{2}$, fiind cuprins în întregime în segmentul $NM_n = \frac{l}{2}$.

De exemplu:

$$M_{i-1}M_n \subset NM_n$$

deci:

$$M_{i-1}M_i < \frac{l}{2}.$$

2°). Punctul M_{i-1} a fost ales pe M_0N. În acest caz, pentru ca segmentul $M_{i-1}M_i$ să fie mai mare ca $\frac{l}{2}$ trebuie ca toate celelalte $n-2$ puncte să fie situate în afara segmentului $M_{i-1}M'_{i-1}$ de lungime $\frac{l}{2}$.

Segmentul $M_{i-1}M'_{i-1}$ există și este cuprins în M_0M_n căci:

$$M_0M_n > M_{i-1}M_n = M_{i-1}N + NM_n = M_{i-1}N + \frac{l}{2} = M_{i-1}N + M_{i-1}M'_{i-1} > M_{i-1}M'_{i-1}$$

Am văzut că trebuie ca celelalte $n-2$ puncte să fie în afara segmentului $M_{i-1}M'_{i-1}$, anume pe segmentele M_0M_{i-1} sau $M'_{i-1}M_n$.

Probabilitatea pentru fiecare punct este:

$$p_1 = \frac{M_0M_n - M_{i-1}M'_{i-1}}{M_0M_n} = \frac{1}{2}.$$

Deoarece punctele au fost alese arbitrar. independent unul de altul, probabilitatea ca toate cele $n-2$ puncte să se afle în afara segmentului $M_{i-1}M'_{i-1}$, ceea

ce echivalează cu faptul că segmentul $M_{i-1}M_i$ este mai mare decît $\frac{l}{2}$ este:

$$p_2 = \underbrace{p_1, \ldots p_1}_{(n-2) \text{ ori}} = p_1^{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Deoarece acest lucru se poate întîmpla doar în cazul cînd M_{i-1}se află pe segmentul M_0N, eveniment care are probabilitatea $p_3 = \frac{M_0N}{M_0M_n} = \frac{1}{2}$ și este independent de alegerea celorlalte puncte, probabilitatea ca segmentul $M_{i-1}M_i$ să fie mai mare ca $\frac{l}{2}$ este $p_4 = p_2p_3 = \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Probabilitatea ca segmentele M_0M_1 și $M_{n-1}M_n$ să fie și ele mai mari ca $\frac{l}{2}$ este tot $\frac{1}{2^{n-2}}$. De exemplu, pentru ca $M_0M_1 > \frac{l}{2}$ trebuie ca toate cele $n-1$ puncte să fi fost alese pe NM_n, deci probabilitatea căutată este:

$$p' = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{n-1 \text{ ori}} = \frac{1}{2^{n-1}} = p_4.$$

Ca atare, probabilitatea ca cel puțin unul din segmentele M_kM_{k+1}, $k = \overline{0, n-1}$ să fie mai mare ca $\frac{l}{2}$ este:

$$p_5 = \underbrace{p_4 + p_4 + \ldots + p_4}_{n \text{ ori}} = np_4 = \frac{n}{2^{n-1}},$$

deoarece evenimentele ca din segmente fiecare să fie mai mare ca $\frac{l}{2}$ sînt independente $\left(\text{nu pot exista simultan mai multe segmente mai mari ca } \frac{l}{2}\right)$.

Evenimentul contrar constă în faptul că toate segmentele sînt mai mici ca $\frac{l}{2}$ și are probabilitatea:

$$p = \bar{p}_5 = 1 - p_5 = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Acesta este și evenimentul căutat de noi. Este clar că $0 < p < 1$, $(\forall)\, n \in N^*$ și certitudinea o obținem cînd $n \to +\infty$ deoarece:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right) = 1.$$

XI.P.5[3]. Fie E_1 evenimentul ca zona I să fie atinsă, E_2 evenimentul ce constă în faptul că nici o săgeată nu atinge ținta și X_i evenimentul ce constă în faptul că ținta este atinsă de i săgeți.

Potrivit formulei probabilității totale:

$$P(E_1) = P(E_2) \cdot P(E_1 | E_2) + P(X_1) \cdot P(E_1 | X_1).$$

Se observă că $P(\bar{E}_1)$ reprezintă probabilitatea ca zona I să nu fie atinsă cînd asupra țintei nu este trasă nici o săgeată astfel că probabilitatea căutată va fi $P(E_1)$. Dar:

$$P(\bar{E}_1 | E_2) = 1,$$

$$P(E_2) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^6 = \frac{2^6}{3^6},$$

$$P(X_1) = C_6^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2^5}{3^5},$$

$$P(\bar{E}_1 | X_1) = 1 - \frac{1}{2^5} = \frac{2^5 - 1}{2^5}$$

astfel că:

$$P(\bar{E}_1) = \frac{2^6}{3^6} + C_6^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2^5}{3^5}$$

și deci:

$$P(E_1) = 1 - \frac{2^6}{3^6} - C_6^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2^5}{3^5} \cdot \frac{2^5 - 1}{2^5}.$$

XI.P.6. Fie $n \in N$, fixat. În mulțimea $\{1, 2, ..., n\}$ se găsesc exact $[\sqrt[3]{n}]_*$ cuburi deci probabilitatea ca alegînd un număr din mulțimea numerelor naturale, acesta să fie cub perfect este:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{[\sqrt[3]{n}]_*}{n} = 0.$$

Probabilitatea cerută este:

$$P(E) = 0$$

unde E este evenimentul ce constă în faptul că numărul ales este cub perfect și de forma $2k + 5$, deci intersecția evenimentelor E_1, E_2, E_1 fiind evenimentul ca numărul ales să fie cub perfect, iar E_2 evenimentul ca numărul ales să fie de forma $2k + 5$ (se vede că evenimentele sînt independente astfel că putem scrie:

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)\, P(E_2) = 0).$$

XI.P.7*. Se pot forma atîtea colective cîte submulțimi are mulțimea $\{1,...,n\}$ (din care excludem mulțimea vidă deoarece fiecare colectiv trebuie să conțină cel puțin o persoană) adică $2^n - 1$. Să căutăm acum numărul cazurilor favorabile și al celor posibile. Ne întrebăm pentru început în cîte feluri se pot forma m colective cu sarcini diferite. Aceasta înseamnă că pot exista și mai multe colective cu aceeași componență. Deci numărul cazurilor posibile este egal cu numărul posibilităților de alegere a m colective din cele $2^n - 1$ care există astfel ca să includem și posibilitățile ca cel mult m colective să aibă aceeași componență. Acest număr este dat de combinările cu repetiție de $2^n - 1$ obiecte luate cîte m: $K_{2^n-1}^m$.

Să studiem acum numărul cazurilor favorabile. Formăm tabloul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ (\text{I, II, } \dots) & (\dots) & \dots & (\dots) \end{pmatrix}$$

unde prin 1, 2,..., am notat persoanele, iar prin I,II,... colectivele, iar $\downarrow$ arată apartenența. Prin acest tablou arătăm că fiecare element din mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ trebuie să aparțină cel puțin unui colectiv deci unei submulțimi de m elemente. Deoarece nu contează ordinea:

$$1, 2, \dots, n$$

și numărul subșirurilor mulțimii de m colective este $2^m - 1$, există $K^n_{2^m-1}$ asemenea aplicații, respectiv cazuri favorabile.

Ca atare, probabilitatea căutată va fi:

$$P = \frac{K^n_{2^m-1}}{K^m_{2^n-1}}.$$

XI.P.8[3]. Deoarece se fac două extrageri ce trebuie să conțină fiecare o anumită bilă, numărul cazurilor posibile este:

$$p = (C^{m-1}_{n-1})^2.$$

Se vor constitui cazuri favorabile numai acele extrageri în care bilele extrase a doua oară sînt diferite de cele din prima extragere (cu excepția, bineînțeles, a bilei cu numărul ales). Pentru prima extracție sînt posibile C^{m-1}_{n-1} cazuri, iar pentru a doua C^{m-1}_{n-m} cazuri, deci în total:

$$f = C^{m-1}_{n-1} C^{m-1}_{n-m}$$

cazuri. Ca atare, probabilitatea căutată va fi:

$$P = \frac{f}{p} = \frac{C^{m-1}_{n-m}}{C^{m-1}_{n-1}}.$$

Pentru ca probabilitatea să existe este necesar ca $n - m \geqslant m - 1$ deci $m \leqslant \frac{n+1}{2}$.

XI.P.9*. Fie AB segmentul dat, iar AC, CD, DE și EB segmentele în care a fost divizat. Toate cazurile posibile ale acestei experiențe aleatoare sînt determinate de poziția întîmplătoare a punctelor de diviziune C, D, E pe segmentul AB, deci de mărimea segmentelor AC, CD, DE și EB, $0 \leqslant AC \leqslant l$; $0 \leqslant CD \leqslant l$; $0 \leqslant DE \leqslant l$; $0 \leqslant EB \leqslant l$) și legate prin relația:

$$AC + CD + DE + EB = l.$$

Vom pune în corespondență aceste segmente cu distanțele h_1, h_2, h_3, h_4 de la un punct interior al unui tetraedru echilateral de înălțime l la fețele lui deoarece și mărimile acestor segmente sînt date de relații echivalente:

$$0 \leqslant h_1 \leqslant l;\ 0 \leqslant h_2 \leqslant l;\ 0 \leqslant h_3 \leqslant l;\ 0 \leqslant h_4 \leqslant l;$$

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = l.$$

În acest fel putem reprezenta cîmpul de evenimente al experienței ca mulțimea punctelor interioare tetraedrului echilateral de înălțime l. Astfel, mulțimea evenimentelor favorabile experienței $AC < a$, $CD < a$, $DE < a$, $EB < a$ poate fi reprezentată de totalitatea punctelor din interiorul tetraedrului care satisfac simultan toate inegalitățile:

$$h_1 < a;\ h_2 < a;\ h_3 < a;\ h_4 < a.$$

Făcînd această corespondență putem exprima probabilitatea ca un punct să se afle în una din regiunile tetraedrului (h_1, h_2, h_3, h_4 — să satisfacă anumite relații), ca raportul dintre volumul acestei regiuni și volumul V al tetraedrului inițial. Relațiile limită:

$$h_1 = a;\ h_2 = a;\ h_3 = a,\ h_4 = a$$

sînt satisfăcute de mulțimea punctelor interioare tetraedrului situate pe planele paralele la fețele tetraedrului

situate la distanțele a de fețele tetraedrului. Există posibillitățile:

1°). $\frac{1}{2} < a < l$. Suprafețele care satisfac relațiile:

$$h_1 = a;\ h_2 = a;\ h_3 = a;\ h_4 = a$$

separă patru tetraedre echilaterale egale de înălțime $l - a$ și volum V' care conțin punctele corespunzătoare cazurilor nefavorabile experienței. Probabilitatea căutată va fi exprimată prin raportul:

$$p = \frac{V - 4V'}{V} = 1 - 4\left(1 - \frac{a}{l}\right)^3.$$

deoarece, conform unei proprietăți cunoscute:

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{l - a}{l}\right)^3.$$

2°). $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$. În acest caz cele patru tetraedre corespunzătoare cazurilor nefavorabile experienței se intersectează după șase tetraedre echilaterale egale de înălțime $l - 2a$ și volum V''.

Deci:

$$p = \frac{V - 4V' + 6V''}{V} = 1 - 4\left(1 - \frac{a}{l}\right)^3 + 6\left(1 - \frac{2a}{l}\right)^3.$$

3°). $a \leqslant \frac{1}{3}$. Nu avem vreo legătură din tetraedrul echilateral, care să satisfacă simultan relațiile din ipoteză — în cazul limită $a = \frac{1}{3}$, regiunea corespunzătoare cazurilor favorabile este un punct, centrul de greutate a tetraerdului — deci $p = 0$.

Observație. Dacă punem condiția ca cele patru segmente să poată fi laturile unui patrulater, deci $a = \frac{l}{2}$, atunci $p = \frac{1}{2}$.

PROBLEME FINALE

PROBLEME DE SINTEZĂ

XII.1[1]. Fie f un izomorfism al corpului numerelor reale pe el însuși.

a°). Să se determine $f(0)$, $f(1)$ și $f(-1)$.

b°). Să se arate că, pentru orice număr rațional q, are loc egalitatea $f(q) = q$.

c°). Să se demonstreze că pentru orice $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$, rezultă $f(\varepsilon) > 0$. Să se deducă de aici că f este o aplicație crescătoare.

d°). Folosind rezultatele stabilite la punctele precedente, să se demonstreze că singurul izomorfism al corpului numerelor reale pe el însuși este aplicația identică.

(Concurs elevi, 1972)

XII.2[1]. Se dă polinomul cu coeficienți întregi definit prin legea $P(x) = x^3 + 5x - 1$.

a°). Să se reprezinte grafic funcția y definită prin $y = P(x)$.

b°). Să se determine cu cel puțin două zecimale exacte una din rădăcinile reale ale polinomului P.

c°). Să se decidă dacă polinomul P are sau nu rădăcini numere raționale.

d°). Să se evalueze, cu aproximație, timpul care v-ar fi necesar pentru indicarea tuturor zecimalelor a uneia dintre rădăcinile reale ale polinomului P.

(Admitere, Fac. mat., București, 1975)

XII.3[2]. Să se arate că dacă proiecțiile unui corp pe două plane sînt cercuri, atunci aceste două cercuri sînt egale.

XII.4[1]. 17 oameni de știință sînt în corespondență, fiecare cu ceilalți 16. Corespondența lor se referă doar la trei subiecte diferite; doi savanți oarecare au un singur subiect de corespondență.

Să se demonstreze că cel puțin trei savanți au același subiect de corespondență.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

XII.5[3]. Într-un plan se dau $n \geqslant 3$ puncte astfel că distanța cea mai mare dintre oricare două puncte, din cele date, este d. Se numesc diametri ai sistemului de puncte date acele segmente de dreaptă care unesc două dintre punctele date și au lungimea d.

Să se demonstreze că numărul acestor diametri nu este mai mare decît n.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

XII.6[3]. Se dă o mulțime X cu șase elemente.

a°). Să se arate că există 6 mulțimi cu cîte 3 elemente astfel încît oricare submulțime cu două elemente a lui X să fie conținută cel puțin într-una din mulțimile cu trei elemente.

b°). Să se demonstreze că șase este numărul minim de mulțimi cu cîte trei elemente care au proprietatea specificată la punctul a°).

(Baraj, 1973)

XII.7[1]. Trei coarde împart un cerc C_1 în 7 regiuni. Pot avea aceste regiuni ariile egale?

XII.8[1]. Se dau 6 puncte în plan, oricare trei din ele necoliniare. Se unesc toate punctele între ele fie cu segmente verzi, fie cu segmente roșii. Există totdeauna printre triunghiurile avînd vîrfurile în mulțimea celor 6 puncte date, un triunghi cu laturile de o singură culoare?

(Baraj, 1973)

XII.9[1]. Fie $n \geqslant 3$ puncte în plan astfel încît oricare trei să fie necoliniare. Să se arate că se poate construi un cerc care să treacă prin cel puțin 3 din cele n puncte și să nu conțină nici un punct din cele n în interior.

XII.10[2]. Într-un plan se iau 100 de puncte astfel încît oricare 3 dintre ele să nu fie coliniare. Se consideră toate triunghiurile cu vîrfurile în aceste puncte. Să se arate că printre aceste triunghiuri există cel mult 70 de triunghiuri cu toate unghiurile ascuțite.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

XII.11[1]. Să se determine numărul minim de triunghiuri neascuțitunghice avînd vîrfurile într-o mulțime de 6 puncte, oricare trei dintre ele nefiind coliniare (cele 6 puncte fiind coplanare).

(Baraj, 1973)

XII.12*. Dacă $b_k = k$, $k = \overline{1, n}$, să se arate că există o alegere a semnelor $+$ și $-$ în fața fiecărui produs $b_ib_jb_kb_l$ astfel ca:

$$\sum (\pm\, b_ib_jb_kb_l) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^4\right].$$

unde suma $\sum$ se extinde la acele produse $b_ib_jb_kb_l$ în care avem b_i, b_j, b_k, b_l distincte dar și la acelea pentru care $b_k = b_i \neq b_j = b_l$ sau $b_l \neq b_i = b_j \neq b_k$, $b_l \neq b_k$.

XII.13[3]. Fie într-un plan $n \geqslant 2$ puncte. Printre toate dreptele care unesc aceste n puncte cîte două nu se află drepte paralele, perpendiculare sau confundate.

Prin fiecare din punctele date se duc perpendiculare pe toate dreptele ce se pot construi cu celelalte $n - 1$ puncte date.

Care este numărul maxim de intersecții ale acestor perpendiculare, în afara punctelor date?

XII.14[1]. Se consideră în plan $2n + 3$ puncte, $n \geqslant 1$, astfel încît oricare 3 să ife necoliniare și oricare 4 neconciclice.

Se poate duce un cerc prin 3 din aceste puncte care să lase n puncte în afară și n puncte în interior?

XII.15[1]. Într-un plan sînt date n puncte, din care, în afară de p puncte care sînt situate pe aceeași dreaptă, oricare alt grup de 3 puncte nu sînt coliniare și nici un

punct din cele p puncte nu este situat pe o dreaptă ce trece prin două puncte din cele $n - p$ rămase.

Cîte drepte pot uni aceste puncte?

XII.16[1]. Se dau n puncte în plan, $n > 4$, astfel că oricare trei dintre ele nu sînt coliniare. Să se arate că cel mai mic număr de patrulatere convexe cu vîrfurile în cîte 4 puncte din punctele date este C_{n-3}^2.

XII.17[1]. Fie $n \geqslant 3$ puncte în plan astfel încît oricare trei să fie necoliniare. Să se arate că există un cerc care să treacă prin cel puțin trei din punctele date și să le conțină pe toate celelalte în interior.

XII.18[2]. Să se arate că nu există numere ale căror pătrate să se termine cu $n \geqslant 4$ cifre egale.

XII.19[2]. Se știe că dacă:

$$a + b + c = 0$$

atunci:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

Să se generalizeze pentru n numere.

(N. Mihăileanu, G.M.B, 11577)

XII.20[1]. Să se arate că dacă polinomul f, cu coeficienți reali, verifică inegalitatea:

$$f(x) \geqslant 0, \ (\forall) x \in R$$

atunci se pot găsi polinoamele $\varphi_1, \varphi_2 \in R[X]$ astfel încît:

$$f(x) = [\varphi_1(x)]^2 + [\varphi_2(x)]^2.$$

XII.21[1]. Fie $f : R \to R$ o funcție bijectivă, $f(1) = k$.

Definim legea de compunere internă $*: R^2 \to R$ astfel:

$$(\forall) x, y, \in R, \ x * y = f^{-1}[f(x) + f(y) - k].$$

Dovediți că dubletul $(R, *)$ este grup abelian.

XII.22. Se dă $\overline{\overline{A \cup B}} = n$, $\overline{\overline{A \cap B}} = p$ și $\overline{\overline{A - B}} = q$.

Să se afle $\overline{\overline{A}}$ și $\overline{\overline{B}}$.

XII.23². a°). Să se afle cu cîte zerouri se termină produsul:

$$1 \cdot 2 \ldots N_1 = N_1!$$

unde:

$$N_1 = \frac{5^n - 1}{4}, \; n \in N^*.$$

b°). Chestiune analoagă pentru numerele 1977! și $N_2!$ unde:

$$N_2 = \frac{(5n-1)k}{4}, \; k \in \{1, 2, 3, 4\}, \; n \in N^*.$$

XII.24. Se consideră polinomul P definit prin:

$$P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1, \; n > 3.$$

Să se găsească restul împărțirii acestui polinom prin $x(x-1)^2$.

(Admitere, I.P. București, 1973)

XII.25¹. Fie o mulțime $E_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ și aplicația bijectivă c: $E_n \to E_n$ definită prin:

$$c(a_1) = a_2, \; c(a_2) = a_3, \; \ldots, \; c(a_{n-1}) = a_n, \; c(a_n) = a_1.$$

Fie, de asemenea, c° aplicația identică a mulțimii E_n și:

$$c^1 = c, \; c^2 = c \circ c, \; \ldots, \; c^k = c^{k-1} \circ c, \ldots$$

Să se arate că:

a°). Toate aceste aplicații sînt bijecții;

b°). Cel mai mic întreg strict pozitiv p astfel ca:

$$c^p = c^\circ$$

este:

$$p = n;$$

c°). Mulțimea C_n a tuturor aplicațiilor astfel constituite are n elemente;

d°). Dubletul $(C_n, \circ)$ este un grup comutativ și izomorf cu grupul aditiv Z_n.

XII.26[1]. Să se demonstreze că funcția $f:R \to R$ cu proprietatea:

$(\forall)(x, y) \in R^2$, $x \neq y$, $\sqrt{|f(x) - f(y)|} \leqslant |x - y|$ este constantă pe R.

XII.27[3]. Cunoscînd resturile A_1, A_2, ..., A_k ale împărțirii unui polinom de gradul n, P_n, respectiv prin $x - a_1$, $x - a_2$, ..., $x - a_k$, $n \geqslant k$, să se calculeze restul împărțirii lui P_n prin produsul $(x - a_1)...(x - a_k)$, numerele a_i, $i = \overline{1, k}$, fiind diferite între ele.

XII.28[3]. Fie G un grup abelian. Dacă elementele $a_i \in G$ $(i \in \overline{1, m})$ au ordinele p_i și $*(p_i, p_j) = 1$ pentru $i \neq j$, atunci elementul $a_1 a_2 ... a_m$ are ordinul $p_1 p_2 ... p_m$.

XII.29. Să se arate că izomorfismul de grupuri constituie o relație de echivalență.

XII.30[3]. Să se arate că funcțiile bijective $f:R_0^+ \to R$ astfel încît pentru orice $a, b \in R^+$ să aibă loc inegalitatea:

$$ab \leqslant \frac{1}{2}[af(a) + bf^{-1}(b)],$$

sînt continue.

XII.31*. Un corp $(k, +, \circ)$ se numește algebric închis, dacă orice polinom cu coeficienți din K, se anulează în K.

Să se demonstreze că un corp finit nu este algebric închis.

XII.32[1]. Să se arate că pentru orice $n \in N^*$, $n \neq 2$, $n \neq 6$, are loc inegalitatea:

$$\varphi(n) \geqslant \sqrt{n},$$

unde φ este indicatorul lui *Euler*.

XII.33. Să se găsească toate grupele de cîte patru numere reale (x_1, x_2, x_3, x_4) care au proprietatea că oricare dintre numere adunat cu produsul celorlalte trei dă suma 2.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

XII.34[1]. Să se calculeze suma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}$$

unde $a_1, \ldots, a_n$ sînt în progresie aritmetică iar $b_1, \ldots, b_k$ sînt în progresie geometrică cu raţia nenulă $0 \neq b_1 \neq b_2$.

XII.35[2]. Se dă ecuaţia:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Să se demonstreze că dacă:

$$0 < \sum_{i=1}^{n} |a_i| = a < |a_0|$$

atunci oricare ar fi α rădăcină a ecuaţiei date:

$$|\alpha| \in \left[0, \frac{|a_0|}{a}\right].$$

XII.36[2]. Să se arate că dacă $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $p, r \in Z$ şi $k \in N^*$, atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^p + a_i^r)^k \geqslant n\left[\left(\frac{S}{n}\right)^p + \left(\frac{S}{n}\right)^r\right]^k.$$

INDICAŢII

XII.3[2]. Se va arăta că proiecţiile cercurilor pe dreapta de intersecţie a planelor respective coincid.

XII.5[3]. Se poate raţiona prin inducţie matematică.

XII.12*. Se pot folosi indentităţi saturate.

XII.13[3]. Numărul cerut este cel mult egal cu:

$$M = C_n^2 C_{n-1}^2 - nC_{C_{n-1}^2}^2 - C_n^2 \cdot C_{n-1}^2 - 2C_n^3.$$

XII.14[1]. Se consideră o dreaptă care trece prin două din cele $2n + 3$ puncte și care lasă toate celelalte $2n + 1$ puncte de aceeași parte.

XII.15[1]. Numărul cerut este:

$$C_n^2 - C_p^2 + 1.$$

Demonstrați însă acest rezultat.

XII.18[2]. Se continuă raționamentul făcut în problema VI.92.

XII.19[2]. Se poate proceda prin saturare.

XII.20[1]. Considerăm trei cazuri:

a°). $f(x) = 0$ are numai rădăcini reale,
b°). $f(x) = 0$ are numai rădăcini complexe,
c°). $f(x) = 0$ are și rădăcini reale și rădăcini complexe.

XII.23[2]. Se pot folosi formulele ce dau exponentul numărului prim p în descompunerea lui $n!$ ca produs de factori primi.

XII.27[3]. Se poate folosi teorema lui *Bézout*.

XII.28[3]. Se poate raționa prin inducție matematică.

XII.36[2]. Se poate folosi inegalitatea lui *Jensen* (III.P.170).

XII.1[1]. a°). Din definiția izomorfismului:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ (\forall)(x,\ y)\in R^2, \tag{1}$$

$$f(xy)=f(x)f(y),\ (\forall)(x,\ y)\in R^2. \tag{2}$$

Din (1) deducem, pentru $x=y=0$:

$$f(0+0)=f(0)+f(0)$$

deci $f(0)=0$.

Din (2) deducem:

$$f(1\cdot 1)=f(1)f(1)$$

și avînd în vedere că f este injectivă rezultă $f(1)=1$.

În fine:

$$0=f(0)=f(1-1)=f[1+(-1)]=f(1)+f(-1)$$

de unde $f(-1)=-1$.

b°). Să arătăm întîi că $f(n)=n,\ (\forall)n\in N^*$.

Procedăm prin inducție matematică.

Pentru $n=1$, $f(1)=1$. Presupunem că $f(k)=k$ pentru un $k\in N^*$, oarecare. Din (1):

$$f(k+1)=f(k)+f(1)=k+1$$

deci afirmația este valabilă și pentru $k+1$ și deci, conform principiului inducției matematice, pentru orice $k\in N^*$.

Pentru $z<0, z\in Z$, $-z\in N^*$ deci $f(-z)=-z$ și cum, din (1) și cele stabilite anterior:

$$0=f(0)=f(z-z)=f(z)+f(-z)$$

obținem:

$$f(z)=-f(-z)=z.$$

În continuare, avînd în vedere (2):

$$f(1) = f\left(\frac{a}{a}\right) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) \cdot f\left(\frac{1}{a}\right)$$

deci:

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}, \quad (\forall)a \in Z - \{0\}$$

și:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f(m) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n},$$

oricare ar fi m și n întregi, $n \neq 0$ deci $f(q) = q$, $(\forall)q \in Q$.

c°). Pentru $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$:

$$f(\varepsilon) = f(\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon}) = f^2(\sqrt{\varepsilon}) > 0.$$

Fie $x < y$, $(x, y) \in R^2$, deci $y - x > 0$, adică, avînd în vedere faptul găsit anterior:

$$f(y - x) = f(y) - f(x) > 0$$

de unde:

$$f(y) > f(x)$$

ceea ce dovedește că funcția este strict crescătoare.

d°). Fie $\alpha \in R$. Există atunci două șiruri de numere raționale $\{\lambda_n\}_{n \in N^*}$ și $\{q_n\}_{n \in N^*}$ astfel încît:

$$\lambda_n < \alpha < q_n, \quad (\forall)n \in N^*$$

și:

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = \lim_{n \to +\infty} q_n = \alpha.$$

Aplicînd la cele demonstrate anterior, găsim:

$$\lambda_n = f(\lambda_n) \leqslant f(\alpha) < f(q_n) = q_n, \quad (\forall)n \in N^*$$

și deci:

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = \lim_{n \to +\infty} f(\lambda_n) \leqslant \lim_{n \to +\infty} f(\alpha) \leqslant \lim_{n \to +\infty} f(q_n) = \lim_{n \to +\infty} q_n$$

adică, în fond:

$$\alpha \leqslant f(\alpha) \leqslant \alpha$$

de unde $f(\alpha) = \alpha$, $(\forall)\alpha \in R$.

Deci singurul izomorfism f, $f:R\to R$, este dat de $f(x)=x$ (izomorfism de corpuri).

XII.2¹. a°). Evident:

$$P'(x)=3x^2+5>0,\ (\forall)x\in R,$$

astfel că funcția definită de $y=P(x)$ este strict crescătoare pe domeniul R de definiție. Cum:

$$P''(x)=6x$$

rezultă că funcția P este concavă pe $(-\infty, 0)$ și convexă pe $(0, +\infty)$, punctul de inflexiune fiind $(0, -1)$.

Se poate deci stabili tabelul de variație:

x	$+\infty$		0		$+\infty$
$P'(x)$	$+$	$+$		$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$
$P''(x)$		$-$	0	$+$	

deci graficul alăturat (fig. XII.2).

b°). Cum $P(0)=-1$, $P(1)=5$, avînd în vedere graficul, rezultă că $P(x)=0$ admite o singură rădăcină reală situată în intervalul $(0, 1)$. Aplicarea o singură dată a metodelor coardei și tangentei pentru intervalul $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{5}\right)$ (se observă că $P\left(\frac{1}{6}\right)=-\frac{35}{216}<0$ și $P\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{125}>0$

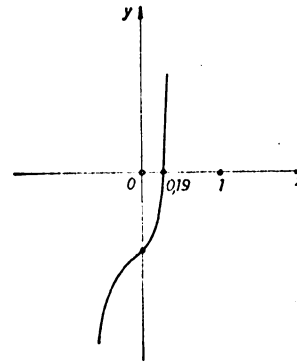


Fig. XII 2

deci rădăcina se află în acest interval) duce la $0{,}19<x_1<0{,}2$, x_1 fiind rădăcina reală respectivă (se poate obține același rezultat prin metoda aproxima-

țiilor succesive). Ca atare, rădăcina reală, calculată cu două zecimale exacte, este $x_1 = 0{,}19$.

c°). Fie $P(x) = 0$ adică:

$$x^3 + 5x - 1 = 0.$$

Dat fiind că singura rădăcină reală este situată în intervalul (0, 1), x_1 nu poate fi întreg. Să admitem că x_1 este rațional adică există p, $q \in N^*$ astfel ca $x_1 = \frac{p}{q}$.

În plus, putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $(p, q) = 1$ în caz contrar simplificăm prin c.m.m.d.c. al lor.

Cum $P(x_1) = 0$ rezultă:

$$p^3 + 5q^2p = q^3$$

adică:

$$p(p^2 + 5q^2) = q^3$$

deci p, q fiind numere naturale, trebuie să admită un divizor comun (căci rezultă $p \mid q^3$ și dacă $p = 1$ rezultă ecuația:

$$q^3 - 5q^2 - 1 = 0$$

care nu are rădăcini în numere naturale), contrar ipotezei.

Deci x_1 nu poate fi rațional.

d°). Deoarece în scrierea cu zecimale numai pentru numerele raționale putem indica, într-un timp finit, cu sau fără ajutorul perioadei, zecimalele unui număr, numerele iraționale nebucurîndu-se de această proprietate, rezultă că timpul cerut este infinit.

XII.3². Excludem cazul banal în care planele sînt paralele. Vom presupune deci că planele π_1 respectiv π_2 nu sînt paralele. Fie $\Delta = \pi_1 \cap \pi_2$ și d_1 respectiv d_2 proiecțiile cercurilor C_1, respectiv C_2 pe Δ, unde $C_1 \subset \pi_1$ și $C_2 \subset \pi_2$.

Va fi suficient să arătăm că d_1 și d_2 coincid.

Vom observa mai întîi că dacă proiectăm un punct din spațiu întîi pe planul π_1, iar această proiecție o proiectăm pe Δ, obținem același punct ca atunci cînd proiectăm punctul întîi pe π_2, iar această proiecție pe Δ.

În adevăr, din teorema celor trei perpendiculare, rezultă că aceste puncte coincid cu proiecția punctului din spațiu pe Δ.

Cu această observație problema este rezolvată deoarece dacă luăm $M \in d_1$ atunci M va fi proiecția unui punct $N_1 \in C_1$ și tot M, va fi proiecția unui alt punct al cercului C_2.

Deci $M \in d_2$ adică $d_1 \subset d_2$.

Analog, $d_2 \subset d_1$.

Observînd că d_1 poate juca rolul de diametru pentru C_1 și d_2 diametru pentru C_2, problema este rezolvată.

XII.4[1]. Fie A un anumit om de știință; el trebuie să corespondeze asupra aceluiași subiect a cu cel puțin 6 din ceilalți savanți (denumiți B, C, D, E, F, G). În adevăr, dacă asupra fiecărui subiect ar coresponda doar cu cîte 5 savanți nu ar mai avea ce scrie celui de-al 16-lea din enunț.

Dacă printre savanții B, D, C, E, F, G se găsesc doi — B și C, de exemplu — care își scriu asupra subiectului a, demonstrația este terminată. Dacă B nu scrie nici unuia dintre savanții C, D, E, F, G asupra subiectului a, el trebuie să le scrie asupra subiectului b sau c și anume la cel puțin 3 — D, E, F, de exemplu — asupra subiectului b — de exemplu — căci dacă ar coresponda asupra fiecărui subiect doar cu cîte 2 savanți, nu ar mai avea ce scrie celui de-al cincilea. Dacă dintre savanții D, E, F, doi — de exemplu, D și F — corespondează între ei tot asupra subiectului b, a fost găsit grupul de savanți căutat: B, D, F.

XII.5[3]. Fie AB, AC, AD trei diametri (dacă există) ai mulțimii de puncte (vezi fig. XII.5). Rezultă că punctele B, C, D se află pe un cerc K_1, de centru A și rază d, iar dacă C este situat între B și D, lungimea arcului BD este cel mult egală cu $\frac{\pi}{3} d$ (căci altfel segmentul BD ar fi mai mare decît d).

Fie K_2 cercul cu centrul în C și de rază d.

Toți diametrii (mulțimi de puncte) ce pleacă din C au a doua extremitate pe arcul MAN_1 al lui K_2, situat în interiorul cercului K_1. Dar distanța de la D la un punct al arcului MA sau de la B la un punct al arcului AN_1 este mai mare decît d, în afară de $CA = d$. Deci, dacă printr-un punct A al mulțimii de puncte pleacă 3 diametri, atunci din cel puțin una din extremitățile lor (diferite de A) — C, de exemplu — nu poate pleca decît un singur diametru.

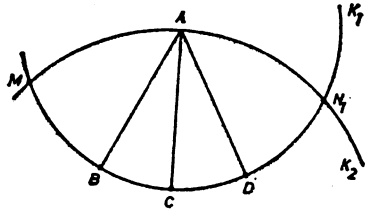


Fig. XII. 5

S-a dovedit astfel că pentru o mulțime de n puncte există doar două posibilități: sau din fiecare punct pornesc cîte doi diametri, sau cel puțin dintr-un punct pornește cel mult un diametru.

Demonstrația o facem prin inducție completă.

Pentru $n = 3$ afirmația este evidentă. Considerăm afirmația valabilă pentru $n = k (k \geqslant 3)$ și fie M o mulțime cu un număr de $k + 1$ puncte:

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}\}.$$

Dacă dintr-un punct — A_1, de exemplu — nu pornește decît cel mult un diametru, atunci numărul diametrilor mulțimii $\{A_1, \ldots, A_{k+1}\}$ este deci cel mult egal cu $k + 1$. Dacă nu există însă un asemenea punct, atunci din fiecare punct A_i $(i = \overline{1, k+1})$ pornesc cîte doi diametri și deci numărul lor este:

$$2(k + 1) \cdot \frac{1}{2} = k + 1.$$

Se vede că n este un maxim al numărului diametrilor mulțimii celor n puncte căci, pentru $k = 3$, numărul diametrilor poate fi 1 în cazul unui triunghi oarecare, (cu laturile diferite între ele), 2 în cazul unui triunghi isoscel (care nu este echilateral) sau 3 (în cazul unui triunghi echilateral). Așa că și numărul diametrilor mulțimii M este cel mult $k + 1$. Numărul maxim este atins, de exemplu, într-un poligon stelat cu n laturi (n impar) sau, în cazul figurii, dacă $n - 3$ puncte sînt situate pe arcul BD (deschis), care are 60°, iar celelalte trei puncte sînt A, B, D.

XII.6[3]. Fie $X = \{1, 2, ..., 6\}$. În condițiile numărului minim, cu cîte 3 elemente, pentru oricare 4 din cele 6 elemente, există cel puțin 6 submulțimi cu 3 elemente (altfel cele $C_4^2 = 6$ submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ inclusiv $\{5, 6\}$, ar genera deja 7 mulțimi). Pentru mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ luăm, de exemplu, mulțimea $\{1, 2, 3\}$.

Pentru oricare 5 din cele 6 elemente se pot forma 5 grupe de 4 a cîte o submulțime de 3 elemente cel puțin, o astfel de mulțime numărîndu-se în $5 - 3 = 2$ grupe de 4; deci cel puțin $3\left(3 \geqslant \frac{5 \cdot 1}{2}\right)$ submulțimi de 3 elemente.

Pentru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ luăm, de exemplu, $\{1, 2, 3\}$ și $\{1, 2, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$. Cu cele 6 elemente se pot forma 6 grupe de 5 a cîte 3 mulțimi de 3 elemente cel puțin, o astfel de mulțime numărîndu-se în $6 - 3 = 3$ grupe de 5; deci cel puțin $\frac{6 \cdot 3}{3} = 6$ mulțimi de elemente.

Pentru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ luăm, de exemplu, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$ și $\{1, 5, 6\}$ (din cauza lui (1, 5), (1, 6) și (5, 6)), $\{2, 5, 6\}$ (din cauza lui (2, 5), (2, 6,)) $\{3, 4, 6\}$ (din cauza lui (3, 6), (4, 6)), ceea ce constituie și un mod de realizare a minimului.

XII.7[1]. Dacă toate regiunile ar avea aceeași arie atunci fiecare coardă împarte cercul în două regiuni a căror raport de arii este egal cu 4/3. Înseamnă că distanțele de la centrul cercului C_1 la cele trei coarde sîn

egale și deci aceste coarde înfășoară un cerc. Deoarece aria regiunii 1 (vezi fig. XII.7) este S_c /7(S_c fiind aria cercului) înseamnă că unghiul făcut de cele două coarde este determinat și egal cu celelalte unghiuri făcute de cele trei coarde.

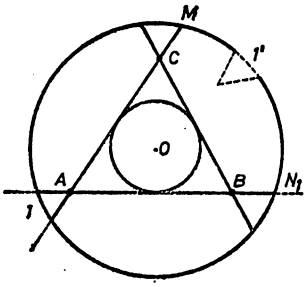


Fig. XII. 7

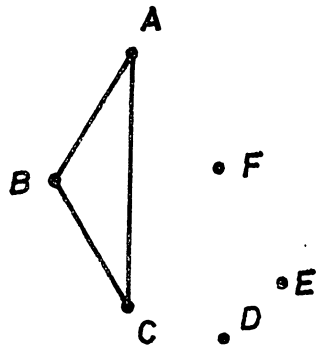


Fig. XII. 8

Înseamnă că triunghiul ABC este echilateral. Dacă rotim figura cu 180°, regiunea 1 va deveni regiunea 1', a cărei arie este strict mai mică decît aria regiunii $MCBN_1$.

XII.8[1]. Din oricare punct pleacă 5 segmente din care 3 sau mai multe sînt roșii sau 3 sau mai multe verzi. Pentru un triunghi este trivial.

Fie acum un triunghi cu toate laturile colorate în roșu ABC (sau, respectiv verde). Dacă dintr-unul din celelalte puncte D, E, F (vezi fig. XII.8) pleacă 3 sau sau mai multe segmente de o culoare, fără ca mulțimea capetelor acestora să coincidă cu $\{A, B, C\}$, conform celor arătate, se mai formează cel puțin un triunghi monocolor (adică cu laturile de aceeași culoare). Dacă din D, E sau F pleacă cîte 3 segmente roșii spre A, B și C se mai formează triunghiuri roșii, iar dacă din D, E și F pleacă cîte 3 segmente verzi spre A, B și C,

celelalte fiind roşii, se mai formează triunghiul roşu DEF. În acest ultim caz s-a obţinut şi un model pentru numai două triunghiuri monocolor.

XII.9[1]. Există două puncte din cele n, astfel încît, toate celelalte să se afle situate de o singură parte a dreptei determinată de ele (aceasta deoarece oricare trei nu sînt coliniare). Această dreaptă se poate obţine în felul următor: mulţimea de puncte fiind finită, există o dreaptă astfel încît toate punctele să fie situate într-un semiplan determinat de ea. Această dreaptă o translatăm pînă atinge un punct şi o rotim în jurul acestui punct pînă trece prin alt punct. Aceste puncte sînt cele căutate, să le notăm cu A şi B. Considerăm toate unghiurile AXB, unde X aparţine mulţimii de puncte date; alegem punctul C astfel încît $\sphericalangle ACB$ să fie maxim. Vom arăta că cercul care trece prin A, B, C este cel căutat. În adevăr, fie D alt punct din cele n. Din felul cum a fost ales C rezultă că $\sphericalangle ADB \leqslant \sphericalangle ACB < 180°$ (deoarece A, B, C sînt necoliniare).

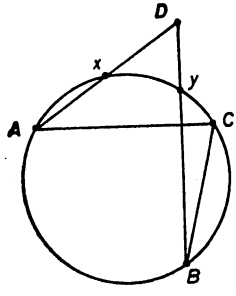


Fig. XII. 9

Dacă D s-ar afla în interiorul cercului, măsura unghiului ADB ar fi măs $\left(\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{xy}\right)$ unde x este punctul de intersecţie al lui AD cu cercul şi analog y, deci strict mai mare decît unghiul ACB. Deci punctul D se află în exteriorul cercului (sau pe circumferinţă). Cum punctul D era arbitrar, problema este rezolvată. Pentru cazul particular $n = 5$ vezi fig. XII.9.

XII.10[2]. Date fiind n puncte într-un plan, vom nota cu T_n, V_n numărul triunghiurilor ce se pot forma cu cele n puncte, respectiv numărul triunghiurilor obtuzunghice cu vîrfurile în aceste puncte. E clar că este suficient să arătăm că $V_n/T_n \geqslant 3/10$, pentru $n \geqslant 5$.

Pentru început considerăm 4 puncte în plan; atunci $V_4 \geqslant 1$. În adevăr, dacă punctele formează un patrulater convex și cum suma unghiurilor sale este 2π, există cel puțin un unghi $\geqslant \frac{\pi}{2}$. Dacă punctele formează un patrulater concav $ABCD$, astfel încît punctul D se află în interiorul triunghiului ABC avem:

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC + \sphericalangle CDA = 2\pi$$

și obținem că cel puțin unul din aceste unghiuri este mai mare decît $2\pi/3 > \pi/2$ deci $V_4 \geqslant 1$.

Fie 5 puncte oarecare în plan. Deoarece cu orice 4 puncte din cele 5 se poate forma cel puțin un triunghi obtuzunghic, în total $C_5^4 = 5$, și deoarece orice triunghi poate aparține cel mult la $C_{5-3}^{4-3} = 2$ grupe distincte de 4 puncte — adică poate fi socotit de cel mult două ori — urmează că:

$$V_5 \geqslant \frac{C_5^4}{C_{5-3}^{4-3}} = 5/2, \text{ deci } V_5 \geqslant 3.$$

Fie acum n puncte în plan. Raționînd analog, găsim:

$$\frac{V_n}{T_n} \geqslant \frac{V_5 C_n^5}{C_{n-3}^2} \cdot \frac{1}{C_n^3} \geqslant \frac{3C_n^5}{C_{n-3}^2 \cdot C_n^3} = \frac{3}{10},$$

ceea ce demonstrează enunțul.

XII.11[1]. Pentru 4 puncte, există cel puțin un triunghi neascuțitunghic cu vîrfurile în 3 dintre ele; acestor 4 puncte li se asociază un patrulater convex cu el puțin un unghi $\geqslant 90°$ etc. Pentru oricare 5 din cele puncte, se pot forma 5 grupe de 4 a cîte un triunghi neascuțitunghic cel puțin, un astfel de triunghi numărîndu-se în $5 - 3 = 2$ grupe de 4; deci cel puțin $3 \geqslant \left(\frac{5 \cdot 1}{2}\right)$ triunghuri neascuțitunghice. Cu cele 6 puncte se pot forma 6 grupe de 5 a cîte 3 triunghiuri

neascuțitunghice cel puțin, un astfel de triunghi numărîndu-se în $6 - 3 = 3$ grupe de 5; deci cel puțin $6(6 \cdot 3/3)$ triunghiuri neascuțitunghice. Iată acum și un model de realizare a minimului: fie 6 puncte A, B, C, D, E, F astfel încît $AC = CE = EA = 1$, $\sphericalangle BAC =$

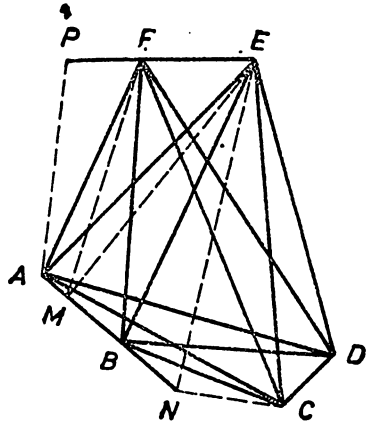


Fig. XII. 11

$= \sphericalangle DCE = \sphericalangle FEA = \frac{\pi}{8}$, M fiind proiecția lui E pe AB, mijlocul lui AN, iar B mijlocul lui MN.

$AB = CD = EF$, $EP = AN$ $(P \in EF)$, $\sphericalangle BAE =$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{24} \Rightarrow \widehat{AEM} = \frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sphericalangle AEN = 2 \cdot \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \sphericalangle NEC =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow NC = 2 \sin \frac{\pi}{8}$$

($\triangle NEC$ este isoscel).

Din teorema sinusului în $\triangle ACN$:

$$\frac{\sin \sphericalangle ACN}{2AM} = \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{NC} \Rightarrow \sin \sphericalangle ACN = AM = \sin \frac{\pi}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sphericalangle ACN = \frac{\pi}{24} \Rightarrow \sphericalangle ACB < \frac{\pi}{24} \Rightarrow \sphericalangle BCD =$$

$$= \sphericalangle DEF = \sphericalangle FAB < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

Triunghiuri ascuțitunghice: ACE, BDF (echilaterale); ABE, CDA, EFC (egale); ABF, CDB, EFD (egale); BCF, DEB, FAD (egale) ceea ce se poate arăta după cum urmează:

$$\left.\begin{array}{l} BF < BE = CF \\ BC = AF < BF < CF \end{array}\right\} \text{ deci } CF \text{ este cea mai mică latură a triunghiului } BCF.$$

$$\left.\begin{array}{l} BF > NF > PA = NC \\ BC > NC \\ CF < CE = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow BF^2 + BC^2 > 2NC^2 > CE^2 > CF^2$$

deoarece $2NC^2 > CE^2$, adică $8 \sin^2 \frac{\pi}{8} > 1$ sau:

$$4\left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) > 1, \; 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 > 0.$$

În concluzie, ΔBCF este ascuțitunghic.

Se observă că și triunghiurile BCE, DEA, FAC (egale) sînt triunghiuri ascuțitunghice. Triunghiurile neascuțitunghice sînt ABC, CDE, EFA (egale), ABD, CDF, EFB (egale), chiar obtuzunghice și cu aceasta modelul s-a verificat.

XII.12*. Știm că dacă $\sum_{i=1}^{2n} b_i' = 0$, atunci (XII. 19):

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} b_i'^2\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{2n} b_i'^4 = 8 \sum b_1' b_2' b_3' b_4'$$

Dacă facem $b_1' = -n, b_2' = -n+1, \ldots, b_n' = -1$, $b_{n+1}' = 1, \ldots, b_{2n}' = n$, obținem că $\sum b_1' b_2' b_3' b_4'$ reprezintă tocmai suma din partea stîngă a egalității din enunț, iar:

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} b_i'^2\right)^2 = 4\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^2;$$

$$2\sum_{i=1}^{2n} b_i'^4 = 4\sum_{i=1}^{n} i^4,$$

și avînd în vedere formulele ce dau pe $\sum_{i=1}^{n} i^2$ și $\sum_{i=1}^{n} i^4$, obținem, după efectuarea calculelor, egalitatea din enunț.

XII.13[3]. Cu $n-1$ drepte se pot construi C_{n-1}^2 drepte distincte deci din fiecare punct se pot duce C_{n-1}^2 perpendiculare pe dreptele ce se pot construi cu celelalte $n-1$ puncte. Deoarece sînt n puncte, numărul total de perpendiculare ce se pot duce este $n\,C_{n-1}^2$. Aceste perpendiculare s-ar tăia în $C_{nC_{n-1}^2}^2$ puncte.

Dar C_{n-1}^2 perpendiculare trec prin fiecare din punctele date deci în fiecare punct se confundă $C_{C_{n-1}^2}^2$ puncte de intersecție ale perpendicularelor.

Deci mai rămîn:

$$C_n^2 \cdot C_{n-1}^2 - nC_{C_{n-1}^2}^2$$

puncte de intersecție ale perndicularelor.

Pe dreapta formată de două puncte ducem perpendicularele din celelalte $n-2$ puncte, toate aceste perpendiculare sînt paralele între ele și deci nu se întîlnesc. Pentru fiecare dreaptă ce se poate construi cu punctele date trebuie să scădem C_{n-2}^2 puncte, deci trebuie să mai scădem încă $C_n^2 \cdot C_{n-2}^2$ puncte de intersecție. Mai rămîn:

$$C_n^2 \cdot C_{n-1}^2 - n\,C_{C_{n-1}^2}^2 - C_n^2 \cdot C_{n-1}^2$$

puncte de intersecție ale perpendicularelor.

Cu cele n puncte se pot construi C_n^3 triunghiuri. Într-un triunghi, înălțimile fiind concurente, rezultă că pentru fiecare triunghi scădem 2 puncte de intersecție care se confundă cu un al treilea. În total se scot $2 \cdot C_n^3$ puncte de intersecție. Deci numărul total al punctelor de intersecție ale perpendicularelor este cel mult:

$$M = C_n^2 \cdot C_{n-1}^2 - nC^2 C_{n-1}^2 - C_n^2 \cdot C_{n-1}^2 - 2C_n^3.$$

XII.14[1]. Luăm o dreaptă care trece prin 2 din cele $2n + 3$ puncte și care lasă toate celelalte $2n + 1$ puncte de aceeași parte. Notăm cu B, C cele 2 puncte și cu $A_1A_2, \ldots, A_{2n+1}$ pe celelalte, numerotate astfel încît:

$$\sphericalangle BA_1C < \sphericalangle BA_2C < \ldots < \sphericalangle BA_{2n+1}C.$$

Considerăm cercul determinat de A_{n+1}, B, C. Acesta va lăsa punctele $A_1, \ldots, A_n$ în afară și va avea pe $A_{n+1}, \ldots, A_{2n+1}$ în interior.

XII.15[1]. Dacă nici o grupă de oricare trei puncte din cele n puncte nu ar fi coliniare, atunci ar exista C_n^2 drepte diferite care unesc punctele de două cîte două.

În acest caz, cele p puncte ar determina și ele $\frac{p(p-1)}{2} = C_p^2$ drepte diferite, însă conform enunțului ele nu determină decît o dreaptă. Prin urmare se pot duce:

$$C_n^2 - C_p^2 + 1$$

drepte.

XII.16[1]. Considerăm punctele A, B a căror distanță este cea mai mică. Printre celelalte $(n - 2)$ puncte fie un punct C, astfel ca unghiul ACB să fie maxim. Atunci în interiorul triunghiului ABC nu se află nici unul din punctele date. Dat fiindcă nu sînt 3 puncte coliniare în cazul a 5 puncte date, se găsește totdeauna cel puțin un patrulater convex cu vîrfurile în 4 din cele 5 puncte. Urmează că, deci, combinînd 3 puncte cu două puncte oarecare se obține totdeauna cel puțin un patrulater convex. Cel mai mic număr de patrulatere convexe este astfel egal cu C_{n-3}^2.

XII.17[1]. Raționamentul este analog cu cel din problema XII.9, cu deosebirea că se alege punctul C astfel încît unghiul ACB să fie minim.

XII.18[2]. Continuăm raționamentul făcut în soluția problemei VI.92. Procedînd analog, avînd în vedere proprietatea 1 de acolo și proprietatea numerelor naturale pusă în evidență în soluția citată, căutăm să vedem ce cifre putem așeza la stînga numerelor de două cifre, găsite anterior (vezi soluția problemei VI.92) astfel ca pătratele lor să se termine cu trei cifre egale cu 4. Analizînd ecuația:

$$(10^2a + N_1)^2 = 10^3A + 444$$

pentru $a = \overline{0, 9}$ și $N_1 = 12, 38, 62, 88$, găsim soluțiile problemei propuse, cu trei cifre, și anume:

$$038, 462, 538, 962.$$

Rezultă că forma numerelor naturale, ale căror pătrate se termină cu (cel puțin) trei cifre egale cu 4 este:

$$500(k - 1) + 38, \quad 500k - 38$$

unde $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

Cercetînd ce cifră putem așeza la stînga numerelor de trei cifre, găsite anterior, astfel ca pătratele lor să se termine cu patru cifre egale, se va ajunge la ecuația:

$$(10^3a + N_1)^2 = 10^4A + 4444$$

pentru $a = \overline{0, 9}$, $N_1 = 038, 462, 538, 962$, de unde obținem afirmația din enunț.

XII.19[2]. Fie $a + b + c + d = 0$ și:

$$K = 2\sum a^4 - (\sum a^2)^2.$$

Pentru $a = 0$, $K = 0$, conform enunțului. Analog, din cauza simetriei $K = 0$, respectiv pentru $b = 0, c = 0, d = 0$. Deci $K : abcd$.

Cîtul $K : (abcd)$ este de gradul 0, deci $K = k_1abcd$, k_1 fiind o constantă.

Făcînd $a = c = -1$ și $b = d = 1$ obținem $k_1 = -8$ deci, dacă:

$$a + b + c + d = 0,$$

atunci:

$$2\sum a^4 - (\sum a^2)^2 = -8\ abcd.$$

Cu aceasta, identitatea este saturată, adică, în general, dacă:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0,\ n \geqslant 4$$

atunci:

$$2\sum a_1^4 - (\sum a_1^2)^2 = -8\sum a_1 a_2 a_3 a_4.$$

Pentru demonstrație procedăm prin inducție.

Pentru $n = 4$ se verifică. Presupunem că afirmația este adevărată pentru un n oarecare. Trecem la $n + 1$ numere în aceeași condiție:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = 0$$

și considerăm expresia:

$$K = 2\sum a_1^4 - (\sum a_1^2)^2 + 8\sum a_1 a_2 a_3 a_4.$$

Pentru $a_{n+1} = 0$, $K = 0$, conform presupunerii că afirmația este valabilă pentru n. Deci $K \vdots a_{n+1}$. Analog, din cauza simetriei, $K \vdots a_i$, $(\forall) i \in \overline{1, n}$ deci:

$$K = k_1 a_1 a_2 \ldots a_{n+1}.$$

Dar K este de gradul 4 pe cînd produsul $a_1 a_2 \ldots a_{n+1}$ este de gradul $n + 1$.

Deci, în mod necesar, $k_1 = 0$ și cu aceasta extinderea este făcută.

XII.20[1]. Distingem trei cazuri:

a°). $f(x) = 0$ are numai rădăcini reale,

b°). $f(x) = 0$ are numai rădăcini complexe,

c°). $f(x) = 0$ are și rădăcini reale și rădăcini complexe.

a°). Dacă f are rădăcini de ordin de multiplicitate impar atunci semnele pe care le are la dreapta și la stînga acestora sînt contrare.

Deci f are rădăcini de ordin de multiplicitate par și numai de tipul acesta adică:

$$f(x) = \varphi^2(x) + [0(x)]^2$$

φ fiind deci un polinom cu coeficienți reali, 0 fiind aplicația identic nulă.

b°). Dacă f are numai rădăcini complexe atunci, acestea vor fi de forma $a + bi$, $b \neq 0$, respectiv $a - bi$, adică va avea rădăcini complexe conjugate.

Separăm rădăcinile în două grupe astfel încît două rădăcini conjugate să nu facă parte din același grupă.

Făcînd produsul liniar corespunzător zerourilor din fiecare grupă, obținem două polinoame $P_1(x) + iP_2(x)$ și respectiv $P_1(x) - iP_2(x)$, P_1 și P_2 fiind polinoame cu coeficienți reali (lucrul acesta se poate ușor demonstra folosind reprezentarea sub forma trigonometrică a numărului complex) astfel că:

$$f(x) = [P_1(x) + iP_2(x)][P_1(x) - iP_2(x)] = P_2^2(x) + P_1^2(x).$$

c°). Ținînd seama de cele arătate mai sus, f va trebui să fie de forma;

$$f(x) = [q(x)P_1(x)]^2 + [q(x)P_2(x)]^2$$

unde q are numai rădăcini reale, iar:

$$P(x) = P_1^2(x) + P_2^2(x)$$

numai rădăcini complexe.

XII.21[1]. Verificăm axiomele grupului abelian:

a°). Comutativitatea:

$$x*y = f^{-1}[f(x) + f(y) - k] = f^{-1}[f(y) + f(x) - k] = y*x.$$

b°). Asociativitatea:

$$x*(y*z) = x*f^{-1}[f(y) + f(z) - k] = f^{-1}[f(x) + f(f^{-1}(f(y) + f(z) - k)) - k] = f^{-1}[f(x) + f(y) + f(z) - 2k].$$

$(x*y)*z = [f^{-1}(f(x) + f(y) - k)]*z = f^{-1}[f(f^{-1}(f(x) + f(y) - k) + f(z) - k] = f^{-1}[f(x) + f(y) + f(z) - 2k]$, deci operația este asociativă.

c°). Elementul neutru este 1:

$$x*1 = f^{-1}[f(x) + f(1) - k] = f^{-1}[f(x)] = x.$$

d°). Fiecare element x are un invers. Fie acesta $\tilde{x}$:

$$x*\tilde{x} = 1,$$

adică:

$$f^{-1}[f(x) + f(\tilde{x}) - k] = 1,$$

sau:

$$f(x) + f(\tilde{x}) - k = f(1),$$

de unde:

$$\tilde{x} = f^{-1}[2k - f(x)].$$

XII.22. Succesiv:

$$A = (A \cap B) \cup (A - B);\ (A \cap B) \cap (A - B) = \emptyset$$

deci:

$$\bar{\bar{A}} = \overline{\overline{(A \cap B) \cup (A - B)}} = \overline{\overline{A \cap B}} + \overline{\overline{A - B}} = p + q,$$

$$A \cup B = B \cup (A - B);\ B \cap (A - B) = \emptyset$$

deci:

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{B \cup (A - B)}} = \bar{\bar{B}} + \overline{\overline{A - B}}, \text{ de unde:}$$

$$\bar{\bar{B}} = \overline{\overline{A \cup B}} - \overline{\overline{A - B}} = n - q.$$

XII.23². (vezi și X.P.2) a°). Numărul de zerouri este dat de puterea lui 5 din reprezentarea lui $N_1!$ ca produs de numere prime, căci $10 = 2 \cdot 5$ și factorii de 2 sînt mai numeroși decît cei de 5.

Deci:

$$\psi_5 = \left[\frac{5^n - 1}{4 \cdot 5}\right]_* + \ldots + \left[\frac{5^n - 1}{4 \cdot 5^k}\right]_* + \ldots$$

Dar:

$$\left[\frac{5^n-1}{4\cdot 5}\right]_* = \left[\frac{5^n+4-5}{4\cdot 5}\right]_* = \left[\frac{5^{n-1}-1}{4}\right]_*;$$

și reprezintă puterea lui 5, din produsul $N_1!$, anume numărul numerelor divizibile cu 5 din numerele 1, 2,... N_1. Continuînd în acest mod găsim că există $\frac{5-1}{4}$ numere divizibile cu 5^{n-1}.

Deci numărul de numere căutat este egal cu:

$$\frac{5^{n-1}-1}{4}+\frac{5^{n-2}-1}{4}+\ldots+\frac{5-1}{4}=\frac{5^n-4n-1}{16}\in N.$$

b°). Fie $m\in N^*$ și p un număr prim $(p<m)$. Exponentul lui p în produsul $m!=1\cdot 2\ldots m$ este dat de:

$$S_p=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^k}\right]_*$$

unde $[a]_*$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

În adevăr, în $m!$ intră produsul:

$$p\times(2\times p)\times(3\times p)\times\ldots\times\left(\left[\frac{m}{p}\right]_*\times p\right)=$$

$$=\left[\frac{m}{p}\right]_*!\times p^{\left[\frac{m}{p}\right]_*}.$$

Numărul $m!$ se divide cu $p^{\left[\frac{m}{p}\right]_*}$ dar și cu acea putere a lui p care intră în produsul $\left[\frac{m}{p}\right]_*!$, adică cu:

$$p\times(2\times p)\times\ldots\times\left(\left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]_*}{p}\right]_*\times p\right)=$$

$$=\left[\frac{m}{p^2}\right]_*!\times p^{\left[\frac{m}{p^2}\right]_*}.$$

Continuăm astfel pînă ajungem la exponentul s cu proprietatea:

$$p^s \leqslant m < p^{s+1}$$

(este clar că $\left[\frac{m}{p^k}\right]_* = 0$, pentru orice k pentru care $p^k > m$).

Un alt mod de a determina pe s se bazează pe algoritmul lui *Euclid*. Succesiv:

$$\begin{aligned} m &= pq_1 + r_1 \qquad (0 \leqslant r_1 < p), \\ q_1 &= pq_2 + r_2 \qquad (0 \leqslant r_2 < p), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{k-1} &= pq_k + r_k \qquad (0 \leqslant r_k < p), \end{aligned} \tag{1}$$

pînă ajungem la $q_k = 0$.

Exponentul căutat este dat deci de:

$$S_p = q_1 + \ldots + q_n. \tag{2}$$

Resturile $r_1, r_2, \ldots, r_k$, în ordine inversă sînt tocmai cifrele lui m, dacă m se scrie în baza p.

Aceasta rezultă din faptul că, dacă din ecuațiile (1) eliminăm pe $q_1, q_2, \ldots, q_k$, obținem:

$$m = p^{k-1} r_k + \ldots + r_1.$$

Fie $x = \sum_{i=1}^{k} r_i$. (3)

Dacă adunăm ecuațiile (1), utilizînd (2) și (3), obținem:

$$m + S_p = p\, S_p + x$$

$$\text{de unde } S_p = \frac{m - x}{p - 1}.$$

Pentru 1977!:

$$\varphi_5 = \left[\frac{1977}{5}\right]_* + \left[\frac{1977}{25}\right]_* + \left[\frac{1977}{125}\right]_* + \left[\frac{1977}{625}\right]_* = 492$$

iar pentru $N_2!$, care se mai scrie ca fiind egal cu:

$$N_2! = 1 \cdot 2 \ldots N_2, \quad N_2 = \underbrace{\overline{kk \ldots k}}_{\text{de } n \text{ ori}(5)} \qquad (5)$$

$$S_p = \frac{\frac{(5^n-1)k-4nk}{4}}{4} = \frac{(5^n - 4n - 1)k}{16}.$$

Pentru $k = 1$ obținem soluția problemei anterioare.

Condiția $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, este necesară căci la transformarea lui N_2 în baza 5, cifrele trebuie să fie mai mici ca 5.

XII.24. Împărțitorul fiind de gradul 3, restul va avea gradul 2, deci:

$$P(x) = 1 + x + \ldots + x^n = x(x-1)^2 Q(x) + ax^2 + bx + c.$$

Dacă $x = 0$, obținem $c = 1$, iar dacă $x = 1$, obținem $n + 1 = a + b + c$. Derivînd, obținem:

$$1 + \ldots + nx^{n-1} = 2ax + b + (x-1)^2[xQ(x)]' + 2(x-1)xQ(x)$$

și făcînd $x = 1$, obținem $2a + b = \frac{n(n+1)}{2}$, care împreună cu $a + b = n$ dă:

$$a = \frac{n(n-1)}{2}, \quad b = -\frac{n(n-3)}{2}$$

deci restul este:

$$r = \frac{n(n-1)}{2} x^2 - \frac{n(n-3)}{2} x + 1.$$

XII.25[1]. a°). c° este bijecție, c^1 de asemenea, lucru ce se poate demonstra ușor. Presupunem că c^{k-1} este o bijecție, adică:

1°). $c^{k-1}(x) = c^{k-1}(y) \Rightarrow x = y$.

2°). $(\exists)x$ astfel că oricare ar fi y (x și y din E_n) să aibă loc:

$$y = c^{k-1}(x).$$

Dar:

$$[c(c^{k-1}(x)) = c(c^{k-1}(y)) \Rightarrow x = y] \Rightarrow [(c^{k-1} \circ c)(x) = c^k(x) =$$
$$= c^k(y) \Rightarrow x = y],$$

deci c^k este injecție.

Din 2°), folosind același raționament ca mai sus, deducem că c^k este surjectivă. Deci c^k este bijectivă.

b°). Succesiv:

$$c^k(a_j) = a_{k+i(\mathrm{mod}\, n)}$$

$$c^k[c^m(a_j)] = c^k(a_{j+m(\mathrm{mod}\, n)}) = a_{j+m+k(\mathrm{mod}\, n)} =$$

$$= c^{k+m(\mathrm{mod}\, n)}(a_j)$$

și prin urmare:

$$c^m \circ c^k = c^{k+m(\mathrm{mod}\, n)}$$

de unde urmează că C_n are n elemente și că dubletul $(C_n, \circ)$ este un grup izomorf cu Z_n.

Grupul fiind generat de c^1, ord $C_n = n$, deci $p = n$.

XII.26[1]. Relația din enunț se mai scrie succesiv:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^2$$

cu $x - y \neq 0$, adică:

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant |x - y|, \ (\forall)\ x, y \in R, x \neq y.$$

Fie un punct arbitrar x_0 și U mulțimea șirurilor reale convergente către x_0, adică:

$$U = \{\ \{\alpha_n\}_{n \in N^*},\ \alpha_n \in R,\ \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = x_0\}.$$

Fie un șir $x_n \in U$; conform cu relația stabilită anterior, rezultă:

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right| \leqslant |x_n - x_0|$$

sau:

$$-|x_n - x_0| \leqslant \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqslant |x_n - x_0|,$$

de unde:

$$\lim_{n\to+\infty}(-|x_n - x_0|) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to+\infty} |x_n - x_0|$$

adică $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$, deci există:

$$f'(x_0) = \lim_{x_n\to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

Cum x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că $(\forall)x \in R$, $f'(x) = 0$, adică f este constantă.

XII.27[3]. Restul împărțirii polinomului $P_n(x)$ prin produsul $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k)$ este de forma:

$$R_{k-1}(x) = b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1x + b_0,$$

deci:

$$P_n(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_k)Q_{n-k}(x) + R_{k-1}(x).$$

Înlocuind în identitatea de mai sus pe x cu a_1, $a_2, \ldots, a_k$, și ținînd seama de teorema lui *Bézout*, rezultă că:

$$A_1 = b_{k-1}a_1^{k-1} + b_{k-2}a_1^{k-2} + \ldots + b_1a_1 + b_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_k = b_{k-1}a_k^{k-1} + b_{k-2}a_k^{k-2} + \ldots + b_1a_k + b_0$$

Sub această formă, avem de determinat un polinom R_{k-1}, cunoscînd valorile acestuia pentru k valori ale variabilei.

Vom aplica metoda de interpolare *Lagrange*.

Potrivit acestei metode vom determina un polinom $P_{k-1}(x, 1)$ care să fie egal cu A_1 pentru $x = a_1$ și să se anuleze pentru $x = a_i (i = 2, 3, \ldots, k)$.

Rezultă în definitiv că $P_{k-1}(x, 1)$ se divide cu $(x - a_2) \ldots (x - a_k)$, adică $P_{k-1}(x, 1) = m(x - a_2) \ldots (x - a_k)$ și făcînd $x = a_1$, rezultă:

$$P_{k-1}(a_1, 1) = A_1 = m(a_1 - a_2) \ldots (a_1 - a_k)$$

de unde $m = \dfrac{A_1}{(a_1 - a_2) \ldots (a_1 - a_k)}$;

deci:

$$P_{k-1}(x, 1) = A_1 \frac{(x - a_2) \ldots (x - a_k)}{(a_1 - a_2) \ldots (a_1 - a_k)}.$$

Analog:

$$P_{k-1}(x, j) = A_j \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \ldots (x - a_k)}{(a_j - a_1) \ldots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \ldots (a_j - a_k)}.$$

Restul $R_{k-1}(x)$ se obține sumînd aceste k polinoame, adică:

$$R_{k-1}(x) = \sum_{i=1}^{k} A_i \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \ldots (x - a_k)}{(a_i - a_1) \ldots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \ldots (a_i - a_k)}.$$

XII.28[3]. Procedăm prin inducție matematică.

Fie $a_1, a_2 \in G$ ale căror ordine sînt p_1, respectiv p_2.

Vom avea, din cauză că G este un grup comutativ:

$$(a_1 a_2)^{p_1 p_2} = a_1^{p_1 p_2} a_2^{p_1 p_2} = (a_1^{p_1})^{p_2} (a_2^{p_2})^{p_1} = 1.$$

Rezultă deci că:

$$p_1 p_2 \geqslant \inf \{x | x \in N^*, (a_1 a_2)^x = 1\}.$$

Să arătăm că are loc chiar egalitatea. Pentru aceasta, să presupunem că:

$$\inf \{x | x \in N^*, (a_1 a_2)^x = 1\} = p < p_1 p_2.$$

Atunci:

$$p_1p_2 = pq + r \text{ cu } q, r \in N \text{ și } r < p.$$

Deci:

$$1 = (a_1a_2)^{p_1p_2} = (a_1a_2)^{pq+r} = [(a_1a_2)^p]^q(a_1a_2)^r = (a_1a_2)^r,$$

adică:

$$r \in \{x \mid x \in N^*, (a_1a_2)^x = 1\} = K.$$

Dacă $r \neq 0$ rezultă că $r < \inf K$, absurd. Deci $r = 0$, astfel că $p_1p_2 = pq$ și $\text{cum}_*(p_1, p_2) = 1$, deducem, fie că $p \mid p_1$, fie că $p \mid p_2$.

Fie cazul $p \mid p_1$; atunci $p_1 = pk_1$, deci:

$$(a_1a_2)^{p_1} = [(a_1a_2)^p]^{k_1} = 1$$

sau $a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_1} = 1$, adică $a_2^{p_1} = 1$. Dar a_2 are ordinul p_2, deci $p_2 \mid p_1$, absurd, căci $_*(p_1, p_2) = 1$.

Analog pentru p_2. Așadar, presupunerea $p < p_1p_2$ este absurdă, deci a_1a_2 are ordinul p_1p_2.

Presupunem afirmația adevărată pentru $n - 1$ elemente $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$ din G, deci ordinul produsului $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ este $p_1p_2 \dots p_{n-1}$.

Dar produsul $(a_1 a_2 \dots a_{n-1})\, a_n = a_1 a_2 \dots a_n$ are, conform cazului $n = 2$, ordinul $p_1p_2 \dots p_n$.

XII.29. Fie G și G' două grupuri izomorfe prin f adică, altfel scris, $(G,*) \overset{f}{\sim} (G', \circ)$.

1°). Reflexivitatea: $G \overset{f}{\sim} G$, lucru ce se realizează prin $f(x) = x$.

2°). Simetria. Fie $(G, *) \overset{f}{\sim} (G', \circ)$.

Deci f este bijectivă și deci inversabilă și:

$$f(x*y) = f(x) \circ f(y).$$

Să arătăm că $(G', \circ) \overset{f^{-1}}{\sim} (G, *)$.

În adevăr, egalitatea:

$$f(x*y) = f(x) \circ f(y)$$

implică:

$$f^{-1}(f(x*y)) = f^{-1}(f(x) \circ f(y)),$$

adică:

$$x*y = f^{-1}(f(x) \circ f(y))$$

și cum pentru orice $x \in G$ există un x' unic din G' astfel încît $x = f^{-1}(x')$ (și invers), rezultă:

$$f^{-1}(x')*f^{-1}(y') = f^{-1}(x' \circ y'),$$

deci și:

$$(G', \circ) \overset{f^{-1}}{\sim} (G, *).$$

Să arătăm că relația este tranzitivă, adică:

$$\left.\begin{array}{l}(A, *) \overset{f}{\sim} (B, \circ) \\ (B, \circ) \overset{g}{\sim} (C, \square)\end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{g \overset{c}{\circ} f}{\sim} C$$

unde $g \overset{c}{\circ} f$ are semnificația de g compus cu f.

În adevăr:

$$g \overset{c}{\circ} f = h$$

și:

$$(g \overset{c}{\circ} f)(x*y) = g(f(x) \circ f(y)) = g(f(x)) \square g(f(y)) =$$

$$= (g \overset{c}{\circ} f)(x) \square (g \overset{c}{\circ} f)(y)$$

și h este bijectivă, fiind compunerea a două funcții bijective.

Fiind reflexiv, simetric și tranzitiv, izomorfismul de grupuri este deci o relație de echivalență.

XII.30³. În inegalitatea din enunț înlocuim pe b prin $f(x)$.

Obținem:

$$af(x) \leqslant \frac{1}{2}[af(a) + xf(x)],$$

echivalentă cu:

$$(2a - x) f(x) \leqslant af(a),$$

sau, comutînd pe a cu x:

$$(2x - a) f(a) \leqslant xf(x),$$

de unde:

$$\frac{2x-a}{x}f(a) \leqslant f(x) \leqslant \frac{a}{2a-x}f(a), \quad x \neq 2a$$

sau, cînd $x \to a$:

$$f(a) \leqslant \lim_{x \to a} f(x) \leqslant f(a),$$

ceea ce arată că aceste bijecții sînt continue pe R_0^+.

XII.31*. Fie K_1 grupul multiplicativ subiacent corpului K. Presupunînd card $K = n$, atunci ordinul lui K_1 este $n - 1$.

Fie $k \in K_1$, $k \neq 1$, un element al cărui ordin este p. Atunci mulțimea $K_1^* = \{1, k, \ldots, k^{p-1}\}$ este un subgrup de ordin p al lui K_1, deci conform teoremei lui *Lagrange*, $p \mid n - 1$, adică $n - 1 = pm$, $m \in N$.

Atunci $k^{n-1} = k^{mp} = (k^p)^m = 1$.

Fie $p(x) = x^n - x + 1$ în inelul $K[X]$.

Atunci:

$$p(k) = k(k^{n-1} - 1) + 1 = 1.$$

Dar și pentru $k = 0$, are loc $p(0) = 1$.

Deci $p \in K[X]$ nu admite nici o rădăcină în K.

XII.32[1]. Dacă p este un număr prim și $\alpha \in N^*$, atunci $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ și este evident că pentru $p \geqslant 5$, $p = 2$ și $\alpha \neq 1$, $p = 3$ și $\alpha \neq 1$ are loc $p^\alpha - p^{\alpha-1} \geqslant \sqrt{p^\alpha}$, deci:

$$\varphi(p^\alpha) \geqslant \sqrt{p^\alpha}.$$

Dar $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ și $\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \ldots \varphi(p_k^{\alpha_k}) \geqslant$

$$\geqslant \sqrt{p_1^{\alpha_1}} \ldots \sqrt{p_k^{\alpha_k}} = \sqrt{n},$$

cu excepția cazurilor $k = 1$, $p_1 = 2, \alpha_1 = 1$, deci $n = 2$ și $k = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, deci $n = 6$.

Pentru $p = 3$, $\varphi(p) \geqslant \sqrt{p}$.

Ca atare, cu excepția cazurilor $n = 2$ și $n = 6$, avem:

$$\varphi(n) \geqslant \sqrt{n}.$$

XII.33. Enunțul problemei duce la:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2x_3x_4 &= 2 \\ x_2 + x_1x_3x_4 &= 2 \\ x_3 + x_1x_2x_4 &= 2 \\ x_4 + x_1x_2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Scăzînd prima ecuație din celelalte trei, obținem sistemul:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2x_3x_4 &= 2 \\ (x_1 - x_3)(1 - x_2x_4) &= 0 \\ (x_1 - x_2)(1 - x_3x_4) &= 0 \\ (x_1 - x_4)(1 - x_2x_3) &= 0 \end{aligned}$$

care duce la opt sisteme de soluții:

1°). $x_1 + x_2x_3x_4 = 2$, $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$

2°). $x_1 + x_2x_3x_4 = 2$, $1 - x_3x_4 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$

3°). $x_1 + x_2x_3x_4 = 2$, $x_1 - x_2 = 0$, $1 - x_2x_4 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$

4°). $x_1 + x_2x_3x_4 = 2$, $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $1 - x_1x_2 = 0$

5°). $x_1 + x_2x_3x_4 = 2$, $1 - x_3x_4 = 0$, $1 - x_2x_4 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$

6°). $x_1 + x_2x_3x_4 = 2$, $1 - x_3x_4 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $1 - x_2x_3 = 0$

7°). $x_1 + x_2x_3x_4 = 2$, $x_1 - x_2 = 0$, $1 - x_2x_4 = 0$, $1 - x_2x_3 = 0$

8°). $x_1 + x_2x_3x_4 = 2$, $1 - x_3x_4 = 0$, $1 - x_2x_4 = 0$, $1 - x_2x_3 = 0$

Sistemul 1°) admite soluția în numere reale:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

și soluțiile în numere complexe:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2},$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}.$$

Sistemul 2°) admite soluția:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

și soluția:

$$x_1 = x_3 = x_4 = -1, \; x_2 = 3.$$

Sistemele 3°) și 4°) se obțin din sistemul 2°), permutînd x_2 cu x_3, respectiv cu x_4, adică:

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

$x_1 = x_2 = x_4 = -1, \; x_3 = 3$, pentru sistemul 3°),

$x_1 = x_2 = x_3 = -1, \; x_4 = 3$, pentru sistemul 4°).

Sistemul 8°) admite soluțiile:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

și:

$$x_2 = x_3 = x_4 = -1, \; x_1 = 3.$$

XII.34[1].

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1}{b_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k + r}{b_{k+1}} = \frac{a_1}{b_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{b_{k+1}} +$$

$$+ r \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{b_k} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_n}{qb_n} + \frac{r}{q} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{b_k} =$$

$$= \frac{a_1}{b_1} + \frac{S_n}{q} - \frac{a_n}{qb_n} + \frac{r}{qb_{n-1}} \cdot \sum_{k=2}^{n} q^{n-k} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{q} S_n -$$

$$- \frac{a_n}{qb_n} + \frac{r}{q} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{b_{n-1}(q-1)}$$

de unde rezultă că:

$$S_n = \frac{qa_1}{(q-1)b_1} - \frac{a_n}{(q-1)b_n} + \frac{r(q^n-q)}{b_n(q-1)^2}.$$

XII.35². Deoarece $a > 0$ atunci există un $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel ca $a_k \neq 0$ și pentru orice i cu $n \geqslant i > k$, avem $a_i = 0$, prin urmare ecuația din enunț devine:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^{n-i} = 0 \Leftrightarrow x^k \sum_{i=0}^{k} a_i x^{n-i-k} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^k = 0 \\ \sum_{i=0}^{k} a_i x^{n-i-k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \ldots = x_k = 0 \\ \sum_{i=0}^{k} a_i x^{n-i-k} = 0, \end{cases}$$

ultima condiție fiind cu rădăcinile diferite de 0. Pentru cele k rădăcini egale cu 0, evident:

$$|x_i| \in \left[0, \frac{|a_0|}{a}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Cum α este o rădăcină a ecuației:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^{n-i-k} = 0$$

și este diferită de 0:

$$a_0 \alpha^{n-k} = -\sum_{i=1}^{k} a_i \alpha^{n-i-k}$$

sau, luînd în modul:

$$|a_0|\,|\alpha^{n-k}| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_i|\,|\alpha|^{n-i-k}.$$

Dacă $|\alpha| > \frac{|a_0|}{a}$, cum $|a_0| > a$, rezultă $|\alpha| > 1$

deci:

$$|\alpha|^{n-k} > |\alpha|^{n-i-k}, \ (\forall) i \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

deci ultima inegalitate dă:

$$|a_0|\,|\alpha|^{n-k} \leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_i|\,|\alpha|^{n-i-k} < \sum_{i=1}^{k} |a_i|\alpha|^{n-k} = a|\alpha|^{n-k}$$

adică $|a_0| \leqslant a$, absurd.

XII.36[2]**.** Se cunoaște inegalitatea lui *Jensen*:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

după cum $f''(x) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} 0$.

Făcînd $f(x) = x^m$, $m \in N^* - \{1\}$, se observă că $f''(x) = m(m-1)x^{m-2} > 0$ pentru $x > 0$, deci:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^m}{n} \geqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^m$$

adică:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^m \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^m}{n^{m-1}}$$

unde a_i sînt numere reale strict pozitive.

Succesiv:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^p + a_i^r)^k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} C_k^j a_i^{jp} a_i^{(k-j)r} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} C_k^j a_i^{jp+(k-j)r} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \sum_{i=1}^{n} a_i^{jp+(k-j)r} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{jp+(k-j)r}}{n^{jp+(k-j)r-1}} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j n \left(\frac{S}{n}\right)^{jp+(k-j)r} =$$

$$= n\left[\left(\frac{S}{n}\right)^p + \left(\frac{S}{n}\right)^r\right]^k.$$

XII.37*. Să se rezolve și discute ecuația:

$$[ax + b]_* + cx = d$$

știind că $a, b, c, d \in R$, $a \neq 0$.

XII.38*. Care este probabilitatea ca alegînd un număr din mulțimea numerelor naturale, acesta să fie prim?

XII.39[2]. Fie $f: R \to R$ o funcție astfel încît:

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2},\ (\forall) x \in R$$

unde a este un număr pozitiv dat.

a°). Să se arate că această funcție este periodică.

b°). Să se dea exemplu de o astfel de funcție f (diferită de funcția constantă), luînd pentru a valoarea 1.

(Olimpiada Internațională de Matematică, enunț reformulat)

XII.40[2]. Dacă $a_i \in R$, $a_i > 0$ și $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^k > \frac{(1 + n^2)^k}{n^{k-1}};\ k \in N^*.$$

XII.41*. Fie p_n al n-lea număr prim. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{p_{n+3}}{p_{n+1} \cdot p_n} > \frac{2n + 3}{2(n + 1)(n + 2)}.$$

XII.42*. Dacă:

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_i \in R,\ i \in \overline{1, n},$$

și:

$$\int_0^1 x^k P(x)\,dx = 0,\ (\forall)\ k \in \{1, \ldots, n\}$$

atunci:

$$\int_0^1 [P(x)]^2\,dx = \left[(n+1)\int_0^1 P(x)\,dx\right]^2.$$

XII.43. Găsiți partea întreagă a numărului:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

XII.44[1]. Să se integreze ecuația diferențială:

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$$

în ipoteza că:

$$A(x) + B(x) + C(x) = 0.$$

XII.45[3]. O urnă conține N_1 bile numerotate de la 1 la N_1. Din această urnă se extrag n bile, $n \leqslant N_1$. Să notăm prin X cel mai mic număr scris pe bilele extrase și cu Y cel mai mare. Considerînd extracțiile cu și fără întoarcere, să se calculeze:

a°). $P(X > x)$, $P(X = x)$,

b°). $P(Y \leqslant y)$, $P(Y = y)$.

(Concurs elevi, 1971)

XII.46[3]. Să se arate că pentru orice $m \geqslant 3$ există un întreg pozitiv N_m minimal relativ la proprietatea următoare: pentru toate numerele întregi $n \geqslant N_m$, dacă n puncte din plan nu conțin trei puncte coliniare, atunci m dintre ele sînt vîrfurile unui poligon convex.

XII.47*. Se consideră șirul $\{u_n\}_{n \in N}$ definit prin relația de recurență:

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+k-1} - ku_{n+k} = 0,\ n \in N,$$

unde k este un număr natural fixat. Cunoscînd primii k termeni ai şirului, $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$, să se calculeze $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

XII.48[2]. Să se arate că într-un şir de $mn + 1$ întregi distincţi notaţi:

$$U_1, U_2, \ldots, U_{mn+1}$$

există un subşir parţial descrescător de lungime mai mare ca m sau sub un subşir parţial crescător de lungime mai mare ca n.

XII.49*. Se notează prin $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor de forma:

$$\begin{Vmatrix} m & n \\ n-2p & m-2p \end{Vmatrix}$$

unde $m, n, p \in Z$.

a°). Să se arate că înmulţirea matricelor este o lege de compoziţie în $\mathcal{M}$;

b°). Să se determine forma cea mai generală a matricelor din $\mathcal{M}$ astfel ca $\mathcal{M}$ să fie grup faţă de înmulţirea matricelor;

c°). Să se arate că grupul $\mathcal{M}$ se poate reprezenta sub forma:

$$\mathcal{M} = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$$

unde mulţimile M_i, $i \in \overline{1, 4}$, sînt disjuncte două cîte două;

d°). Să se arate că oricare ar fi matricele $A, A' \in M_i$, $i \in \overline{1, 4}$, produsul AA' aparţine lui M_1.

(Concurs elevi, G.M.B, 9740)

XII.50[1]. Să se arate că ecuaţiile:

$$32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0$$

şi:

$$32x^4\sqrt{1-x^2} - 24x^2\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{3} = 0$$

admit rădăcina comună sin 6°.

(C. Ionescu-Țiu, G.M.B, 9998)

XII.51[2]. Dacă $0 < x_i < u$, $(\forall) i \in \overline{1, n}$ și:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = u,\ m \in N^*,\ m \geqslant u,$$

atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m - x_i} \geqslant \frac{n^2}{mn - u}.$$

XII.52. Fie A și B două mulțimi. Atunci:

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2.$$

XII.53[3]. Dacă $x_i > 0$, $i \in \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 1$, atunci:

$$(a + nb)^n \leqslant \prod_{i=1}^{n} (a + bx_i) \leqslant \left(a + \frac{b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^n,$$

$a, b \in R$.

XII.54[3]. a°). În aceeași mulțime suport două legi de compoziție internă definesc cîte o structură de grup.

Este posibil ca una din aceste legi să fie distributivă față de cealaltă?

b°). Mulțimea funcțiilor continue definite pe $[-1, 1]$ cu valori în R formează inel față de operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor.

Are acest inel divizori ai lui zero?

c°). Să se determine toate izomorfismele corpului complex pe el însuși, care invariază corpul numerelor reale.

(Concurs elevi, 1971)

XII.55[1]. Dacă $a, b, c \in R_0^+$, $k > -1$ și:

$$a + b + c = 1$$

atunci:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+k\leqslant\frac{9+k}{27abc}.$$

XII.56[1]. Dacă a și n sînt numere întregi și pozitive atunci există un număr natural A_n astfel ca:

$$(a+\sqrt{a^2-1})^n=A_n+\sqrt{A_n^2-1}.$$

Generalizare.

(Ioan Tomescu, G.M.B, 8634)

XII.57[2]. Dacă $\{a_i\}_{i\in N^*}$ $\{b_i\}_{i\in N^*}$ sînt două șiruri de numere reale la fel ordonate[1] iar $p_i>0$, $(\forall)\ i\in\{1,\ldots,n\}$, atunci:

$$\frac{p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+\ldots+p_na_nb_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{p_1a_1+\ldots+p_na_n}{p_1+\ldots+p_n}\cdot\frac{p_1b_1+\ldots+p_nb_n}{p_1+\ldots+p_n}.$$

Dacă șirurile sînt invers ordonate atunci sensul inegalității se schimbă.

XII.58[3]. a°). Să se rezolve sistemul:

$$\bigcap_{i=1}^{n}X_i=A$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}X_i\right)-\left(\bigcap_{i=1}^{n}X_i\right)=B,$$

necunoscutele fiind mulțimile $X_i\in\mathcal{P}(T)$, $i\in\overline{1,n}$, unoscînd A, $B\in\mathcal{P}(T)$, că A și $N_n=\{m\mid m\in N^*,$

[1] Două șiruri $\{a_n\}_{n\in N}$ $\{b_n\}_{n\in N}$ se numesc *la fel ordonate* acă ambele sînt, sau monoton crescătoare, sau monoton escrescătoare. Ele se numesc *invers ordonate* dacă unul ste monoton crescător, iar celălalt monoton descrescător.

$m \leqslant n\}$ respectiv B și $N_m = \{ n \mid n \in N^*, n \leqslant m\}$ și X_i și X_j sînt respectiv echipotente, $(\forall)$ $(i, j) \in \in \{1, \ldots, n\}^2$.

b°). Să se rezolve sistemul de mai sus înlocuind condiția ca B să fie echipotentă cu N_n cu aceea ca B să fie echipotentă cu N_{nk}.

XII.59[1]. Să se rezolve sistemul matriceal:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ A_1X + B_1Y = C_1 \end{cases}$$

matricele-coeficienți fiind inversabile.

Aplicație:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}; \quad C = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}; \quad B_1 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}; \quad C_1 = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix};$$

(N. Păun, G.M.B, 9872)

XII.60[3]. Dacă $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, să se demonstreze că:

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

Să se stabilească condițiile necesare și suficiente pentru ca egalitatea să aibă loc.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

XII.61[2]. Să se rezolve sistemul:

$$x_1 + a_1^1x_2 + a_1^2x_3 + \ldots + a_1^{n-1}x_n + a_1^n = 0$$
$$x_1 + a_2^1x_2 + a_2^2x_3 + \ldots + a_2^{n-1}x_n + a_2^n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 + a_{n-1}^1 x_2 + a_{n-1}^2 x_3 + \ldots + a_{n-1}^{n-1} x_n + a_{n-1}^n = 0$$

$$x_1 + a_n^1 x_2 + a_n^2 x_3 + \ldots + a_n^{n-1} x_n + a_n^n = 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ fiind numere date iar $a_i \neq a_j$, pentru $i \neq j$, $i, j \in (1, \ldots, n\}$, $a_i \neq 0$, $(\forall) i \in \{1, \ldots, n\}$.

XII.62[1]. Să se arate că:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{C_n^i}{x - i} = \frac{n!}{\prod_{i=0}^{n} (x - i)}$$

unde $x_i \neq 0,\ 1, \ldots, n,\ (\forall) i \in \overline{0,\ n}$.

XII.63*. Dacă p_n reprezintă al n-lea număr prim, să se arate că există $N(k) \in N$ astfel că pentru orice n, $n > N(k)$, are loc:

$$p_{p_n}^k < p_1 \ldots p_n.$$

(Valeriu Mangu, G.M.A, 1974)

XII.64*. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ cu lungimea laturilor de 3 și respectiv $2n$ unități, n fiind un număr natural.

Se notează cu $I(n)$ numărul de moduri în care acest dreptunghi poate fi acoperit prin dreptunghiuri identice cu lungimile laturilor de 2 unități și respectiv o unitate.

Să se demonstreze că $I(n)$ este multiplu de 3 dacă și numai dacă $n - 1$ este multiplu de 3.

(Baraj, 1972)

XII.65*. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \mu_j) x_{ij} \right]^2 \leqslant \max_{1 \leqslant k, l \leqslant m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - x_{il})^2$$

lacă:

$$\sum_{s=1}^{m} \lambda_s = \sum_{s=1}^{m} \mu_s = 1$$

şi:

$$\lambda_s,\ \mu_s \geqslant 0,\ (\forall)s \in \{1, \ldots, m\}.$$

XII.66*. Fie $I^n = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid |\lambda_1| \leqslant 1, \ldots, |\lambda_n| \leqslant 1;\ \lambda_i \in R\}$.

Să se calculeze:

$$\max_{I^n} \sum_{j=1}^{n} \left| \lambda_j - \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{j-1} + \lambda_{j+1} + \ldots + \lambda_n}{n} \right|.$$

(Baraj, 1973)

XII.67*. Se dau n numere pozitive $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reale strict pozitive astfel încît:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Să se arate că are loc relaţia:

$$x_1^{\lambda_1}\ x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} \leqslant 1.$$

(Baraj, 1973)

XII.68*. Să se demonstreze că din oricare zece numere naturale de cîte două cifre (scrise în baza zece) se pot extrage două grupe diferite, distincte, nevide, astfel ca suma numerelor din fiecare grupă să fie aceeaşi.

(Olimpiada Internaţională de Matematică)

XII.69*. Considerăm două funcţii $f,\ g: R \to R$ satisfăcînd ecuaţia:

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)g(y)$$

pentru orice x şi y.

Să se demonstreze că dacă f nu este identic nulă şi dacă $|f(x)| \leqslant 1$ pentru orice x, atunci $|g(y)| \leqslant 1$ pentru orice y.

(Olimpiada Internaţională de Matematică

XII.38*. Se poate folosi inegalitatea lui *Cebîșev* (vezi [32], [64]).

XII.41*. Se poate folosi formula:

$$p_{n+2} \leqslant p_{n+1} + p_n$$

(vezi [72]).

XII.44[1]. Se observă o soluție particulară $y = e^x$.

XII.45[3]. Se observă că:

$$P(X > x) = \frac{(N_1 - x)^n}{N_1^n}.$$

XII.47*. Se atașează ecuația caracteristică.

XII.50[1]. Se pot folosi formulele care dau pe $\sin nx$ respectiv $\cos nx$.

XII.51[2]. Se poate folosi inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică a n numere pozitive.

XII.53[3]. Se poate folosi inegalitatea lui *Mac Laurin* (III.P.140).

XII.58[3]. Se pot folosi relațiile lui *De Morgan*.

XII.61[2]. Se construiește un polinom ajutător.

SOLUȚII

XII.37*. Fie $P \in Z$ astfel încît $P = [ax + b]_*$. Deci:

$$P + cx = d.$$

Presupunînd $c \neq 0$ avem $x = \frac{d-P}{c}$, iar $P = \left[\frac{a}{c}(d-P)+b\right]_*$. Notînd $\frac{a}{c} = \alpha$ și ținînd seama de definiția funcției f, $f(k) = [k]_*$, obținem:

$$P \leqslant \alpha(d-P)+b < P+1$$

sau:

$$-(\alpha d+b) \leqslant -P(1+\alpha) < -(\alpha d+b)+1$$

sau încă:

a°). Dacă $\alpha+1<0$ atunci:

$$\frac{\alpha d+b}{\alpha+1} \leqslant P < \frac{\alpha d+b}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}.$$

b°). Dacă $\alpha+1>0$ atunci:

$$\frac{\alpha d+b}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} < P \leqslant \frac{\alpha d+b}{\alpha+1}.$$

c°). Dacă $\alpha+1=0$, vom arăta că ecuația poate avea o infinitate de soluții, nici o soluție sau soluția zero.

S-a presupus $c \neq 0$. Dacă $c=0$ și $d \in Z$, atunci ecuația are o infinitate de soluții.

În adevăr, în acest caz avem:

$$d \leqslant ax+b < d+1$$

care are întotdeauna soluție.

Dacă $d \notin Z$ atunci ecuația nu are soluție.

Discuție. Să cercetăm în ce situații ecuația are sau nu are soluții. Notăm $\frac{\alpha d+b}{\alpha+1} = A$, iar $\frac{1}{\alpha+1} = \rho$.

a°). Cazul $\alpha + 1 < 0$. Presupunem $A - [A]_* \neq 0$ (A nu este întreg). Deoarece $\rho < 0$ și $A - [A]_* > 0$ există una și numai una din situațiile:

$$[A]_* < A < A - \rho \leqslant [A]_* + 1$$

sau:

$$[A]_* < A < [A]_* + 1 < A - \rho.$$

În primul caz se vede că nu putem avea soluție deoarece $A \leqslant P < A - \rho$. În al doilea caz putem avea cel puțin o soluție și anume pentru $P = [A]_* + 1$.

Dacă $[A]_* + n < A - \rho$ ($n \in N^*$) atunci avem cel puțin n soluții pentru P.

Presupunem $A - [A]_* = 0$. Atunci sau $[A]_* = A < A - \rho < [A]_* + 1$ și în acest caz avem o soluție pentru $P = [A]_*$ sau $[A]_* = A < [A]_* + 1 < A - \rho$ cu cel puțin două soluții pentru P și anume pentru $P_1 = [A]_*$ și $P_2 = [A]_* + 1$.

Dacă $[A]_* + n < A - \rho$ atunci avem cel puțin $n + 1$ soluții pentru P.

b°). Cazul $\alpha + 1 > 0$. Fie $A - [A]_* \neq 0$. Avem, sau $[A]_* < A - \rho < A < [A]_* + 1$ sau $A - \rho = [A]_* < A < [A]_* + 1$, sau $A - \rho < [A]_* < A < [A]_* + 1$.

În prima și în a doua situație nu avem soluții pentru că $A - \rho < P \leqslant A$. În a treia situație avem cel puțin o soluție pentru P și anume pentru $P = [A]_*$.

Dacă $A - \rho < [A]_* - n$ ($n \in N^*$), avem cel puțin $n + 1$ soluții pentru P și anume pentru $P_0 = [A]_*$, $P_1 = [A]_* - 1, \ldots, P_n = [A]_* - n$.

c°). $\alpha + 1 = 0$. Notăm $x = n + r$, unde $n = [x]_*$.

Fie cazul $a = 1$, $b = 0$, și $c = -1$. Presupunem că soluția este $x = n + r > 0$. Înlocuind în ecuație obținem:

$$[n + r]_* - (n + r) = d,$$

de unde $d = -r$. Deci, dacă $-1 < d \leqslant 0$ (r fiind partea zecimală avem $0 \leqslant r < 1$), atunci ecuația are o infinitate de soluții pozitive; pentru $d \neq -r$, ecuația nu are nici o soluție. Dacă $d \notin (-1, 0]$ ecuația nu are soluții.

Să presupunem că $x = n + r < 0$. Atunci $[n + r]_* = n - 1$. Ecuația va avea o infinitate de soluții negative pentru $r = (-1-d)$ dacă $-1 < -1-d \leqslant 0$ (sau $-1 \leqslant d < 0$) și nici o soluție negativă pentru $r \neq -(1+d)$.

Dacă $d \notin (-1, 0]$, ecuația nu are soluții.

Cazul general $a = K$, $c = -K$ se reduce la cel studiat, făcînd $z = Kx$. Cazul $a = -K$, $c = K$, analog.

Sintetizînd, obținem:

Cazul:	*Numărul de soluții*
A°). $\alpha + 1 < 0$	
a°). $A - [A]_* \neq 0$	
1°). $A - [A]_* \leqslant 1 + \rho$	....nici o soluție;
2°). $A - [A]_* > 1 + \rho$	....cel puțin o soluție
2'°). $A - [A]_* > n + \rho$	....cel puțin o soluție.
b°). $A - [A]_* = 0$	
1°). $0 < \rho + 1$	.....o soluție;
2°). $\rho + 1 < 0$	.....cel puțin două soluții;
2'°). $\rho + n < 0$	.....cel puțin $n+1$ soluții.
B°). $\alpha + 1 > 0$	
1°). $A - [A]_* \geqslant \rho$	.....nici o soluție
2°). $A - [A]_* < \rho$	.....cel puțin o soluție;
3°). $A - [A]_* = \rho - 1$	..o soluție;
4°). $A - [A]_* < \rho - 1$	..cel puțin două soluții;
5°). $A - [A]_* = \rho - n$	....n soluții;
6°). $A - [A]_* < \rho - n$	..cel puțin $n+1$ soluții.
C°). $\alpha + 1 = 0$	.....sau nici o soluție, sau soluția 0, sau o infinitate de soluții.

XII.38*. Fie $\pi(n)$ numărul de numere prime care nu depășesc pe n. Se știe că:

$$A\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < B\frac{n}{\ln n}; \quad (\forall) n > 10 \qquad (1)$$

unde A și B pot aleși suficient de mari dar finiți (vezi [32]). Probabilitatea care ne interesează este tocmai:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi(n)}{n}$$

adică 0, după cum ușor se observă din formula (1).

XII.39². a°). Se vede clar că $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$ iar din $f(x) - [f(x)]^2 \geqslant 0$ rezultă $f(x) \leqslant 1$ deci:

$$f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \ (\forall) x \in R.$$

Să presupunem că b este perioada. Fie în egalitățile:

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$$

și:

$$f(x+b) = f(x)$$

$x = 0$; obținem $f(0) = f(b)$ și deci:

$$f(a) - \frac{1}{2} = \sqrt{f(b) - [f(b)]^2}.$$

Cum $f(a) \geqslant \frac{1}{2}$, ridicînd la pătrat obținem:

$$[f(b)]^2 - f(b) + [f(a)]^2 - f(a) + \frac{1}{4} = 0$$

de unde obținem soluția convenabilă:

$$f(b) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(a) - [f(a)]^2} = f(a + a) = f(2a).$$

Deci dacă există b astfel ca $f(x + b) = f(x)$, putem lua $b = 2a$. Pentru a arăta că $f(x)$ este periodică de perioadă $2a$, vom arăta că:

$$f(x + a) = f(x + a + 2a).$$

Succesiv:

$$f(x + 3a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x + 2a)\,[1 - f(x + 2a)]} = \frac{1}{2} +$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x + a)\,[1 - f(x + a)]}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1 - \left[\frac{1}{2} + \sqrt{f(x + a)\,[1 - f(x + a)]}\right]} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt{f^2(x + a)[1 - f(x + a)]^2}} = \frac{1}{2} +$$

$$+ \sqrt{[f(x + a)]^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} f(x + a) + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} +$$

$$+ \left|f(x + a) - \frac{1}{2}\right| = f(x + a).$$

b°). Putem considera ca exemple funcțiile:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } [x]_* \text{ este număr par} \\ \frac{1}{2} \text{ dacă } [x]_* \text{ este impar} \end{cases}$$

sau:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|.$$

XII.40[2]. Aplicînd inegalitatea lui *Jensen* (vezi III. P. 170) pentru funcțiile $f(x) = x^k$ și $f(x) = \frac{1}{x^k}$, $x > 0$, $k \in N^*$, obținem imediat:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k \geqslant \frac{1}{n^{k-1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^k} \geqslant n^{k+1}.$$

Avem:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^k = C_k^0 \sum_{i=1}^{n} a_i^k + C_k^1 \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-2} + \ldots +$$

$$+ C_k^{k-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^{k-2}} + C_k^k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^k} \geqslant C_k^0 \frac{1}{n^{k-1}} +$$

$$+ C_k^1 \frac{1}{n^{k-3}} + \ldots + C_k^{k-1} \frac{1}{n^{-(k-1)}} + C_k^k \frac{1}{n^{-(k+1)}} =$$

$$= \frac{C_k^0 + C_k^1 n^2 + C_k^2 n^4 + \ldots + C_k^k n^{2k}}{n^{k-1}} =$$

$$= \frac{(1 + n^2)^k}{n^{k-1}}.$$

XII.41*. Se verifică ușor că pentru $n \geqslant 7$ are loc:

$$p_n > 2(n + 1)$$

deci:

$$\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_{n+1}}<\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}=$$

$$=\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

şi cum (vezi [72]):

$$p_{n+2}<p_{n+1}+p_n,\ n>1,$$

rezultă:

$$\frac{p_{n+2}}{p_np_{n+1}}\leqslant\frac{p_n+p_{n+1}}{p_np_{n+1}}=\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_{n+1}}<$$

$$<\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$$

Deci pentru $n<7$ putem avea soluții ale inecuației. Verificînd, se obțin valorile 1, 2, 3 ($p_1=2$).

XII.42*. Fie $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$.

Deci:

$$\int_0^1 x^kP(x)\mathrm{d}x=0,\quad(\forall)k\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\},$$

şi trebuie să demonstrăm:

$$\int_0^1[P(x)]^2\mathrm{d}x=[(n+1)\int_0^1P(x)\mathrm{d}x]^2.$$

Cum $[P(x)]^2=a_nx^n\ P(x)+a_{n-1}x^{n-1}P(x)+\ldots+$ $+a_0P(x)$ şi cum $\int_0^1x^k\ P(x)\mathrm{d}x=0,(\forall)k\in\{1,\ldots,n\}$,

obținem:

$$\int_0^1[P(x)]^2\mathrm{d}x=a_0\int_0^1P(x)\mathrm{d}x.$$

Rămîne să arătăm că:

$$a_0 = \int_0^1 (n+1)^2 P(x)\mathrm{d}x.$$

Evident:

$$0 = \int_0^1 x^k\, P(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_0^1 x^{k+i}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+k+1}\,;\ (\forall)\ k \in \{1,\ldots,n\}.$$

Însă:

$$\frac{a_n}{n+t+1} + \frac{a_{n-1}}{n+t} + \ldots + \frac{a_0}{t+1} =$$

$$= \frac{Q(t)}{(t+1)\,(t+2)\ldots(t+n+1)}$$

unde Q este un polinom de grad $\leqslant n$, şi avînd în vedere relaţia de condiţie $Q(K) = 0$, $(\forall)\ K \in \{1,\ldots,n\}$ deci $Q(t) = \alpha(t-1)\,(t-2)\ldots(t-n)$, $(\forall)\ t \in R$, α fiind o constantă.

Ca atare:

$$\frac{a_n}{n+t+1} + \frac{a_{n-1}}{n+t} + \ldots + \frac{a_0}{t+1} =$$

$$= \frac{\alpha(t-1)\ \ldots\ (t-n)}{(t+1)\,(t+2)\ \ldots\ (t+1+n)} \qquad (1)$$

$$(\forall)\ t \in R - \{-1,\ -2,\ \ldots,\ -n,\ -n-1\}.$$

Atunci:

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_n}{n+1} + \ldots + \frac{a_0}{1} =$$

$$= \frac{\alpha(-1)\,(-2)\ \ldots\ (-n)}{1\cdot 2\ \ldots\ (n+1)} = \frac{\alpha\,(-1)^n}{n+1}$$

deci:

$$\alpha = (n+1)(-1)^n \int_0^1 P(x)\,dx.$$

Dacă în relația (1) amplificăm cu $t+1$ și facem apoi $t=-1$, găsim că:

$$a_0 = \frac{\alpha(-2)(-3)\ldots(-1-n)}{1\cdot 2\ldots(n+1)} = \alpha(-1)^n(n+1)$$

deci:

$$a_0 = (n+1)^2 \int_0^1 P(x)\,dx.$$

XII.43. După oarecari calcule, găsim că:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}. \quad (1)$$

În adevăr:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Analog pentru a doua parte.

Dînd în (1) valori lui n de la 1 la 1000000 și adunînd relațiile astfel obținute, după extragerea radicalilor, găsim că:

$$1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 1999,$$

deci partea întreagă a numărului este 1998.

XII.44[1]. Se observă că $y = e^x$ este soluție.

Fie $y = e^x u$. Ecuația devine, avînd în vedere condiția:

$$A(x)u'' + [2A(x) + B(x)]u' = 0$$

adică:

$$\frac{u'}{u''} = -\frac{A(x)}{2A(x) + B(x)}.$$

Integrînd, găsim:

$$\ln|u''| = -\int \frac{A(x)dx}{2A(x) + B(x)} + C_1,$$

adică:

$$|u'| = C_2 e^{-\int \frac{A(x)dx}{2A(x)+B(x)}}, \quad C_2 > 0$$

unde $C_2 = e^{C_1}$. De aici, integrînd din nou:

$$u = C_2 \int e^{-\int \frac{A(x)dx}{2A(x)+B(x)}} + C_3,$$

C_1, C_2 și C_3 fiind constante.

XII.45[3]. Să considerăm cazul în care extragerile se fac cu întoarcerea bilei în urnă.

a°). Evenimentul $X > x$ se traduce prin aceea că bilele extrase trebuie să fie dintre bilele numerotate cu $x + 1$, $x + 2, \ldots, N_1$. Pentru fiecare extragere în parte sînt $N_1 - x$ cazuri favorabile și N_1 cazuri posibile, deci probabilitatea este egală cu $\frac{N_1 - x}{N_1}$.

Dacă se fac n extrageri, acestea fiind independente, probabilitatea este produsul probabilităților corespunzătoare fiecărei extrageri, deci:

$$P(X > x) = \frac{(N_1 - x)^n}{N_1^n}.$$

Dar:

$$P(X > x) = P(X = x + 1) + P(X = x + 2) + \ldots + P(X = N_1) = \frac{(N_1 - x)^n}{N_1^n},$$

iar:

$$P(X > x - 1) = P(X = x) + P(X = x + 1) + \ldots + P(X = N_1) = \frac{(N_1 - x + 1)^n}{N_1^n},$$

de unde:

$$P(X = x) = P(X > x - 1) - P(X > x) = \frac{(N_1 - x + 1)^n}{N_1^n} - \frac{(N_1 - x)^n}{N_1^n}.$$

b°). Evenimentul $Y \leqslant y$ înseamnă ca bilele extrase să fie dintre bilele numerotate 1, 2, ..., y.

Pentru fiecare extragere în parte sînt y cazuri favorabile și N_1 cazuri posibile, deci probabilitatea este egală cu $\frac{y}{N_1}$, iar pentru n extrageri independente avem:

$$P(Y \leqslant y) = \frac{y^n}{N_1^n}.$$

Dar:

$$P(Y \leqslant y) = P(Y = 1) + P(Y = 2) + \ldots + P(Y = y - 1) + P(Y = y)$$

deci:

$$P(Y = y) = P(Y \leqslant y) - P(Y \leqslant y - 1) = \frac{y^n}{N_1^n} - \frac{(y-1)^n}{N_1^n}.$$

Considerăm acum cazul cînd extragerile se fac fără întoarcerea bilei în urnă.

a°). Pentru evenimentul $X = x$ sînt:

cazuri posibile: $C_{N_1}^n$;

cazuri favorabile: $C_{N_1-x}^{n-1}$, deoarece pentru bila cu cel mai mic număr avem un singur caz favorabil, și anume bila numerotată cu x, caz pe care-l combinăm cu toate cele $C_{N_1-x}^{n-1}$ cazuri diferite de extragere a celorlalte $n - 1$ bile dintre bilele numerotate cu $x + 1, x + 2, \ldots, N_1$, (deci dintre $N_1 - x$ bile), prin urmare:

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1-x}^{n-1}}{C_{N_1}^n}.$$

Pentru ca:

$$P(X = x) \neq 0$$

trebuie ca:

$$N_1 - x \geqslant n - 1,$$

deci:

$$x \leqslant N_1 - n + 1.$$

Apoi:

$$P(X > x) = P(X = x + 1) + P(X = x + 2) + \ldots + P(X = N_1 - n + 1) = \sum_{k=x+1}^{N_1-n+1} \frac{C_{N_1-k}^{n-1}}{C_{N_1}^n}.$$

b°). Pentru evenimentul $Y = y$ sînt:

cazuri posibile: $C_{N_1}^n$;

cazuri favorabile: C_{y-1}^{n-1}, deoarece pentru bila cu cel mai mare număr avem un singur caz favorabil și anume, bila numerotată cu y, caz pe care-l combinăm cu toate cele C_{y-1}^{n-1} cazuri de extragere a celorlalte $n-1$ bile dintre bilele numerotate cu $1, 2, \ldots, y-1$, prin urmare:

$$P(Y = y) = \frac{C_{y-1}^{n-1}}{C_{N_1}^y}.$$

Pentru ca:

$$P(Y = y) \neq 0$$

trebuie ca:

$$y - 1 \geqslant n - 1,$$

deci:

$$y \geqslant n.$$

Apoi:

$$P(Y \leqslant y) = P(Y = n) + P(Y = n + 1) + \ldots +$$

$$+ P(Y = y) = \sum_{k=n}^{y} \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{N_1}^n}.$$

XII.46³. Mai întîi vom arăta că dacă cinci puncte din plan nu conțin trei puncte coliniare, atunci patru dintre acestea sînt vîrfurile unui patrulater convex.

În adevăr, cele cinci puncte definesc $C_5^2 = 10$ segmente de dreaptă care se unesc două cîte două și perimetrul acestei configurații este un poligon convex. Dacă acest poligon convex este un patrulater sau pentagon, proprietatea este imediată, deoarece în cazul unui penta-

gon convex, patru dintre vîrfurile sale formează un patrulater convex. În caz contrar, poligonul convex este triunghi și deci două din cele cinci puncte sînt în interiorul triunghiului.

Cele două puncte interioare definesc o dreaptă și două din cele trei vîrfuri ale triunghiului sînt situate de aceeași parte a acestei drepte. În acest caz, cele două puncte interioare împreună cu cele două vîrfuri ale triunghiului, situate de aceeași parte a dreptei, formează un patrulater convex și proprietatea este demonstrată.

Să arătăm în continuare că dacă m puncte în plan nu conțin trei puncte coliniare și dacă orice submulțime formată din patru puncte definește un patrulater convex, atunci cele m puncte sînt vîrfurile unui poligon convex.

Cele m puncte definesc $\frac{m(m-1)}{2}$ segmente de dreaptă care le unesc două cîte două iar perimetrul acestei configurații este un poligon convex cu q vîrfuri. Vom arăta că $m = q$. Să alegem un sens de parcurgere a acestui poligon convex și să notăm vîrfurile întîlnite cu $V_1, V_2, \ldots, V_q$. Dacă unul din punctele alese se găsește în interiorul acestui poligon convex, el trebuie să se găsească în interiorul unuia dintre triunghiurile $V_1V_2V_3, \ldots, V_1V_{q-1}V_q$, ceea ce contrazice afirmația că orice mulțime formată din patru puncte — oricare 3 necoliniare — definește un patrulater convex. Rămîne că $m = q$ și cele m puncte sînt vîrfurile unui patrulater convex.

XII.47*. Ecuația caracteristică asociată ecuației liniare este (cazurile $k = 0$, 1, fiind banale, le excludem):

$$\lambda^k - \frac{1}{k}(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \ldots + 1) = 0. \qquad (1)$$

Avem $\lambda_1 = 1$. Să arătăm că celelalte rădăcini sînt diferite între ele și subunitare.

Presupunem că ecuația admite două rădăcini egale, fie valoarea lor comună λ'. Înmulțind ecuația cu $\lambda - 1$ găsim:

$$P(\lambda) = k\,\lambda^{k+1} - \lambda^k(k+1) + 1 = 0$$

Rezultă că și ecuația $P'(\lambda) = 0$, admite rădăcina λ'.

Dar:

$$P'(\lambda) = k(k+1)\,\lambda^{k-1}(\lambda - 1). \qquad (2)$$

Ecuația (1) admite pe $\lambda_1 = 1$ drept rădăcină simplă, deoarece, dacă ordinul de multiplicitate al ei ar fi mai mare ca 1, ecuația:

$$k\lambda^{k-1} - \frac{1}{k}[(k-1)\lambda^{k-2} + \ldots + 1] = 0$$

ar admite și ea drept rădăcină pe:

$$\lambda_1 = 1,$$

adică:

$$k^2 - [(k-1) + (k-2) + \ldots + 1] = 0$$

sau:

$$k^2 - \frac{k(k-1)}{2} = 0,$$

absurd. Revenind, rezultă că dacă ecuația (1) ar avea o rădăcină cu ordinul de multiplicitate mai mare ca 1, atunci aceasta, din (2), ar fi egală cu 0.

Dar 0 nu este o rădăcină pentru (1).

Să arătăm că rădăcinile reale ale ecuației (1) sînt mai mici decît 1, cu excepția rădăcinii λ_1. Presupunem, prin absurd, că există o rădăcină a ecuației mai mare ca 1.

Fie $\lambda_2 = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, această rădăcină.

Din (1) deducem:

$$\frac{\lambda_2^k (k\lambda_2 - k - 1) + 1}{\lambda_2 - 1} = 0$$

adică, cu notația făcută:

$$\frac{(1+\varepsilon)^k \ (k\varepsilon - 1) + 1}{\varepsilon} = 0. \tag{3}$$

Dar, după dezvoltarea binomului după *Newton* (exceptînd cazul $k = 1$):

$$1 + k\varepsilon < (1+\varepsilon)^k = 1 + k\varepsilon +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2} \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^k$$

deci, din (3):

$$\frac{(k\varepsilon + 1)(k\varepsilon - 1) + 1}{\varepsilon} < \frac{(1+\varepsilon)^k \ (k\varepsilon - 1) + 1}{\varepsilon} = 0$$

adică, după oarecari calcule:

$$k^2\varepsilon < 0,$$

absurd. Deci, revenind, orice rădăcină reală a ecuației (1) este mai mică decît 1 (cu excepția lui λ_1).

Pentru rădăcinile complexe, raționînd analog și folosind inegalitatea generalizată a triunghiului, obținem $|\lambda_i| < 1$, dacă acestea există.

Revenind:

$$u_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_k\lambda_k^n, \tag{4}$$

λ_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, fiind rădăcinile ecuației (1), iar C_1, C_2, ..., C_k fiind constante reale și $\lambda_1 = 1$.

Constantele C_1, C_2, ..., C_k se determină din condițiile inițiale:

$$\begin{aligned}
&C_1 + C_2 + \ldots + C_k = u_0,\\
&C_1 + C_2\lambda_2 + \ldots + C_k\lambda_k = u_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1 + C_2\lambda_2^{k-1} + \ldots + C_k\,\lambda_k^{k-1} = u_{k-1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Acest sistem este compatibil deoarece rădăcinile ecuației (1) sînt simple și determinantul principal are valoarea:

$$\prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j).$$

Rezultă:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = C_1.$$

Trebuie să găsim așadar pe C_1.

Din sistemul (5), C_1 se exprimă liniar în funcție de u_0, u_1, ..., u_{k-1}, sub forma următoare:

$$C_1 = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{k-1}\,u_{k-1} \tag{6}$$

unde α_0, α_1, ..., α_{k-1} se exprimă numai în funcție de rădăcinile λ_i ale ecuației caracteristice și, prin urmare,

nu depind de $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$. Constantele α_i pot fi determinate astfel:

valorile inițiale sînt numerele arbitrare $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$. Aceste valori inițiale determină complet șirul u_n. Dacă luăm acum valorile inițiale:

$$u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_k = \frac{u_0 + \ldots + u_{k-1}}{k}$$

obținem din nou o soluție a ecuației noastre:

$$\varphi_n = C_1' + C_2' \lambda_2^n + \ldots + C_k' \lambda_k^n.$$

Întrucît $u_n = \varphi_n$ pentru $n = 0, 1, \ldots, k-1$, rezultă $u_n = \varphi_n$ și $C_1' = C_1$. Însă $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ din (6) nu depind de valorile inițiale $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$. Ca atare:

$$C_1 = \alpha_0 u_0 + \ldots + \alpha_{k-1} u_{k-1}$$

și:

$$C_1' = C_1 = \alpha_0 u_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \frac{u_0 + \ldots + u_{k-1}}{k}$$

cu aceiași α_i, $i = 0, \ldots, k-1$.

În acest fel obținem egalitatea:

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{k-1} u_{k-1} =$$
$$= \alpha_0 u_1 + \alpha_1 u_2 + \ldots + \alpha_{k-2} u_{k-1} +$$
$$+ \alpha_{k-1} \frac{u_0 + \ldots + u_{k-1}}{k}.$$

De aici, ținînd seama de faptul că α_i nu depinde de valorile inițiale ale șirului u_n, obținem:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_{k-1}}{k}$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_{k-1}}{k} = 2\alpha_0$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\alpha_{k-1}}{k} = 3\alpha_0$$

.....

$$\alpha_{k-2} = \alpha_{k-3} + \frac{\alpha_{k-1}}{k} = (k-1)\alpha_0$$

$$\alpha_{k-1} = \alpha_{k-2} + \frac{\alpha_{k-1}}{k} = k\alpha_0$$

și, prin urmare:

$$C_1 = \alpha_0(u_0 + 2u_1 + \ldots + ku_{k-1}).$$

Cum α_0, potrivit observației precedente, nu depinde de $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$, putem lua, într-un caz particular, $u_0 = u_1 = \ldots = u_{k-1} = 1$, și, din modul în care este definit șirul $\{u_n\} \in N$, $u_n = 1$, $(\forall)n \in N$, deci:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = C_1 = 1$$

deci:

$$\alpha_0 = \frac{2}{k(k+1)}$$

astfel că, pentru cazul general:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = C_1 = 2 \cdot \frac{u_0 + 2u_1 + \ldots + ku_{k-1}}{k(k+1)}.$$

XII.48². Un șir parțial este, după cum se știe, un șir format cu elemente ale șirului inițial, scrise în ordinea în care ele apar în șirul inițial.

Fie l_i^- lungimea celui mai lung șir parțial descrescător care începe cu U_i și l_i^+ lungimea celui mai lung șir parțial crescător care începe cu U_i.

Să presupunem prin absurd că afirmația făcută este falsă, adică orice șir parțial descrescător are o lungime mai mică sau egală cu m și orice șir parțial crescător are o lungime mai mică sau egală cu n.

Vom defini o funcție f pe mulțimea $\{U_1, U_2, ..., U_{mn+1}\}$ cu valori în produsul cartezian $\{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}$ astfel:

$$f(U_i) = (l_i^-, l_i^+).$$

Să arătăm că f este o injecție.

Presupunem de exemplu că $i < j$. În acest caz $U_i > U_j$ implică $l_i^- > l_j^-$ deoarece la șirul parțial descrescător de lungime maximă care începe cu U_j mai putem adăuga la stînga cel puțin un element, și anume pe U_i, și astfel lungimea șirului crește cu cel puțin o unitate adică $l_i^- > l_j^-$. Tot astfel $U_i < U_j$ implică $l_i^+ > l_j^+$, deoarece la șirul parțial crescător de lungime maximă care începe cu U_j putem adăuga la stînga cel puțin un element, și anume pe U_i și astfel lungimea șirului crește cu cel puțin o unitate, adică $l_i^+ > l_j^+$.

Deci $U_i \neq U_j$ implică $f(U_i) \neq f(U_j)$, sau $(l_i^-, l_i^+) \neq (l_j^-, l_j^+)$.

În concluzie, funcția f este injectivă și deci, numărul de elemente din mulțimea $\{U_1, U_2, ..., U_{mn+1}\}$ este mai mic sau egal cu numărul elementelor din codomeniu, adică din $\{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}$ și care conține $mn + 1 \leqslant mn$, elemente ceea ce este fals.

În concluzie, presupunerea făcută mai înainte este falsă și deci afirmația din enunț este adevărată.

XII.49*. a°). Fie A și $A' \in \mathcal{M}$,

$$A = \begin{Vmatrix} m & n \\ n-2p & m-2p \end{Vmatrix}, \quad A' = \begin{Vmatrix} m' & n' \\ n'-2p' & m'-2p' \end{Vmatrix}.$$

Avem:

$$AA' = \begin{Vmatrix} m & n \\ n-2p & m-2p \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} m' & n' \\ n'-2p' & m'-2p' \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} m'' & n'' \\ n''-2p'' & m''-2p'' \end{Vmatrix}$$

unde: $m'' = mm' + nn' - 2p'n \in Z$

$$n'' = mn' + m'n - 2np' \in Z$$

$$p'' = m'p + mp' + n'p - 2pp' \in Z$$

deci:

$$AA' = \begin{Vmatrix} m'' & n'' \\ n''-2p'' & m''-2p'' \end{Vmatrix} \in \mathcal{M}$$

deci operația de înmulțire a matricelor definită pe $\mathcal{M}$ este o lege de compoziție internă.

b°). Deoarece operația de înmulțire a matricelor este în general asociativă, rezultă și asociativitatea înmulțirii în $\mathcal{M}$. Matricea unitate se află în $\mathcal{M}$ căci pentru $n = p = 0$ și $m = 1$ obținem matricea:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Pentru ca inversa unei matrice $A \in \mathcal{M}$ față de înmulțire să existe, trebuie ca $\det A \neq 0$, și în plus, $\det A = \pm 1$, pentru ca inversa A^{-1} să aibă elemente tot numere întregi. Rezultă:

$$\begin{vmatrix} m & n \\ n-2p & m-2p \end{vmatrix} = \pm 1$$

care conduce la (pentru valoarea 1 a determinantului):

$$m^2 - n^2 - 2mp + 2np = 1 \Leftrightarrow (m - n)(m + n - 2p) = 1$$

adică la:

$$\begin{cases} m - n = 1 \\ m + n - 2p = 1, \end{cases}$$

respectiv:

$$\begin{cases} m - n = -1 \\ m + n - 2p = -1 \end{cases}$$

și care dau:

$$\begin{cases} m = p + 1 \\ n = p \end{cases}$$

respectiv:

$$\begin{cases} m = p - 1 \\ n = p \end{cases}.$$

Obținem deci două clase de matrice (M_1) și (M_2) cu:

$$M_1 = \begin{Vmatrix} p+1 & p \\ -p & -p+1 \end{Vmatrix},$$

cu $p \in Z$.

$$M_2 = \begin{Vmatrix} p-1 & p \\ -p & -p-1 \end{Vmatrix},$$

Dar $\det A = -1$ dă:

$$\begin{vmatrix} m & n \\ n-2p & m-2p \end{vmatrix} = -1$$

adică, în final:

$$M_3 = \begin{Vmatrix} p & p-1 \\ -p-1 & -p \end{Vmatrix}$$

$$M_4 = \begin{Vmatrix} p & p+1 \\ -p+1 & -p \end{Vmatrix}.$$

Inversele vor fi:

$$M_1^{-1} = \begin{Vmatrix} -p+1 & -p \\ p & p+1 \end{Vmatrix}$$

$$M_2^{-1} = \begin{Vmatrix} -p-1 & -p \\ p & p-1 \end{Vmatrix}$$

$$M_3^{-1} = \begin{Vmatrix} -p & p-1 \\ -p-1 & p \end{Vmatrix}$$

$$M_4^{-1} = \begin{Vmatrix} p & p+1 \\ -p+1 & -p \end{Vmatrix}.$$

c°). Se observă ușor că M_i și M_j sînt disjuncte $(\forall) i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$.

În adevăr, dacă, de exemplu, $M_1 = M_2$, atunci am obține $p = p'$, $p + 1 = p' - 1$, absurd.

Deci:

$$\mathcal{M} = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4,$$

în ipoteza că $(\mathcal{M}, \cdot)$ este grup.

d°). Fie $A, A' \in M_1$. Atunci:

$$AA' = \begin{Vmatrix} p+1 & p \\ -p & -p+1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} p'+1 & p' \\ -p' & -p'+1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} (p+p')+1 & p+p' \\ -(p+p') & -(p+p')+1 \end{Vmatrix} \in M_1.$$

Analog pentru celelalte mulțimi.

XII.50[1]. Se știe că:

$$\sin n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1}\alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3}\alpha \sin^3\alpha + \ldots$$

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2}\alpha \sin^2\alpha + \ldots$$

Facem $\alpha = 6°$, $n = 5$ și obținem:

$$\sin 30° = C_5^1 \cos^4 6° \sin 6° - C_5^3 \cos^2 6° \sin^3 6° + C_5^5 \cos° 6° \sin^5 6°$$

adică, cum $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$ și $\sin 6° = x$:

$$\frac{1}{2} = 5(1 - x^2)^2 x - 10x^3(1 - x^2) + x^5,$$

sau făcînd calcule:

$$32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0,$$

ceea ce arată că $x = \sin 6°$ este o soluție a ecuației.

A doua relație dă:

$$\cos 30° = \cos^5 6° - C_5^2 \cos^3 6° \sin^2 6° + C_5^4 \cos 6° \sin^4 6°$$

adică:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = (1 - x^2)^{\frac{5}{2}} - 10x^2(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} + 5x^4\sqrt{1 - x^2}$$

sau, făcînd calcule:

$$32x^4\sqrt{1 - x^2} - 24x^2\sqrt{1 - x^2} + 2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3} = 0$$

ceea ce demonstrează că și această ecuație admite rădăcina $x = \sin 6°$.

XII.51². Avem:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - mn = u - mn,$$

adică:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - m) = u - mn$$

sau:

$$\sum_{i=1}^{n} (m - x_i) = mn - u.$$

Dar $m \geqslant u > x_i$, deci $m - x_i > 0$, $(\forall) i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ deci putem aplica inegalitatea mediilor aritmetică și respectiv armonică:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geqslant \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

ce se deduce din inegalitatea lui *Cauchy* (vezi III.P.129):

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}}$$

adică, prin înmulțire:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}.$$

Deci:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m - x_i} \geqslant \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} (m - x_i)} = \frac{n^2}{mn - n}.$$

XII.52. Succesiv:

$(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A) \Rightarrow (x, y) \in A \times B$ și $(x, y) \in B \times A \Rightarrow x \in A$ și $y \in B$ și $x \in B$ și $y \in A \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in A \cap B$ și $y \in A \cap B \Rightarrow (x, y) \in (A \cap B)^2$, deci:

$$(A \times B) \cap (B \times A) \subset (A \cap B)^2.$$

Analog:

$(x, y) \in (A \cap B)^2 \Rightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B) \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in A \cap B$ și $y \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ și $x \in B$ și $y \in A$ și $y \in B \Rightarrow (x, y) \in A \times B$ și $(x, y) \in B \times A \Rightarrow$ $\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A)$, deci:

$$(A \cap B)^2 \subset (A \times B) \cap (B \times A).$$

Deducem că:

$$(A \cap B)^2 = (A \times B) \cap (B \times A).$$

XII.53[3]. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, atunci are loc relația:

$$\left(\frac{\sum x_1 x_2 \ldots x_{k-1}}{C_n^{k-1}}\right)^{\frac{k}{k-1}} \geqslant \frac{\sum x_1 x_2 \ldots x_n}{C_n^k}$$

cu egalitate numai pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ și $k \leqslant n$.
Din ea rezultă:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \left(\frac{\sum x_1 x_2}{C_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(\frac{\sum x_1 x_2 x_3}{C_n^3}\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant \ldots \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{\sum x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}{C_n^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

deci și:

$$\frac{\sum x_1 x_2 \ldots x_k}{C_n^k} \geqslant (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{k}{n}}.$$

Dar $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 1$ deci, conform inegalității lui *Cauchy*

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}},$$

adică:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \ldots x_n \geqslant n^n$$

adică, în fond, $(\forall) k \in N^*$, $k \leqslant n$, avem:

$$\frac{\sum x_1 x_2 \ldots x_k}{C_n^k} \geqslant (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{k}{n}} \geqslant n^{\frac{nk}{n}} = n^k.$$

Pe de altă parte:

$$\prod_{i=1}^{n}(a+bx_i) = a^n + a^{n-1}\, b\sum_{i=1}^{n} x_i + a^{n-2}\, b^2 \sum x_1x_2 +$$

$$+ \ldots + a^{n-k}\, b^k \sum x_1x_2\ldots x_k + \ldots + b^n x_1x_2\ldots x_n.$$

Însă:

$$\sum x_1 \geqslant nC_n^1$$

$$\sum x_1x_2 \geqslant n^2C_n^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum x_1x_2\ldots x_k \geqslant n^kC_n^k$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2\ldots x_n \geqslant n^nC_n^n.$$

Deci:

$$\prod_{i=1}^{n}(a+bx_i) \geqslant a^n + a^{n-1}\, bnC_n^1 + a^{n-2}\, b^2n^2C_n^2 + \ldots +$$

$+ a^{n-k}\, b^kn^kC_n^k + \ldots + b^nn^nC_n^n = (a+bn)^n$ şi cu aceasta prima inegalitate este stabilită.

Conform inegalităţii lui *Mac Laurin* (vezi III.P.140):

$$\sum x_1x_2\ldots x_k \leqslant \frac{C_n^k}{n^k}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^k \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Rezultă în definitiv:

$$\prod_{i=1}^{n}(a+bx_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_n^k\, a^{n-k}\left(\frac{b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^k =$$

$$= \left(a + \frac{b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^n.$$

XII.54[3]. a°). Fie G mulțimea suport și să considerăm $\perp$ și respectiv $\top$ cele două legi de compunere care conferă lui G o structură de grup. Fie e', respectiv e'' elementele neutre ale celor două legi de compunere.

Folosind distributivitatea legii $\top$ față de $\perp$ și ținînd seama că $e' \perp e' = e'$ vom avea:

$$e' \top e' = (e' \perp e') \top e' = (e' \top e') \perp (e' \top e').$$

Cum în G ecuația $a \perp x = b$ are soluție unică, luînd $a = b = e' \top e'$, obținem că $e' \top e'$ este o soluție a ecuației:

$$(e' \top e') \perp x = e' \top e'.$$

Pe de altă parte însă și e' este o soluție a ecuației de mai sus. Rezultă $e' \top e' = e'$.

În altă ordine de idei, în G și ecuația $a \top x = b$ are o soluție unică.

Punînd $a = b = e'$, găsim, conform celor arătate mai sus că, e' este o soluție a ecuației:

$$e' \top x = e'.$$

Cum însă e'' verifică ecuația de mai sus (căci e'' este element neutru față de legea $\top$), rezultă cu necesitate $e' = e''$.

Fie $a, b \in G$. Folosind distributivitatea legii $\top$ față de legea $\perp$ precum și faptul că $e' = e''$ vom avea:

$$a \top b = (a \perp e') \top b = (a \top b) \perp (e' \top b) =$$
$$= (a \top b) \perp (e'' \top b) = (a \top b) \perp b.$$

Urmează că b este o soluție a ecuației $(a \top b) \perp x = a \top b$, și care, după cum am arătat anterior, admite numai soluția $x = e'$. Cum în grupul G ecuația trebuie să aibă o soluție unică, rezultă că $b = e'$. Urmează că, b fiind ales arbitrar, și $e' = e''$, G conține un singur element, deci în concluzie nu există mulțimea G, nebanală, care să fie grup în raport cu legile $\perp$ și $\top$ și în care o operație să fie distributivă față de cealaltă.

b°). Fie $C^{[-1,1]}$ inelul funcțiilor reale continue definite pe segmentul $[-1, 1]$.

Să considerăm funcțiile g și f definite pe $[-1, 1]$, astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \in [-1, 0] \\ x \text{ pentru } x \in (0, 1], \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x \text{ pentru } x \in [-1, 0] \\ 0 \text{ pentru } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Se constată imediat că funcțiile sînt continue, căci:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = g(0) = 0$$

deci aparțin inelului $C^{[-1, 1]}$.

Atît funcția f cît și funcția g nu sînt identic nule, pe cînd $h = f \cdot g$ este o funcție identic nulă. Deci există în $C^{[-1, 1]}$ divizori ai lui 0.

c°). Fie f un izomorfism al lui C care invariază corpul R, deci există o restricție φ a lui f la R.

Fie, în general, $\varphi : R \to R$, izomorfism. Urmează că pentru orice $a, b \in R$ avem:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Făcînd $a = b = 0$ în prima relație, iar $a = b = 1$ în a doua, rezultă $\varphi(0) = 0$ ($\varphi(1) = 0$ sau $\varphi(1) = 1$). Cum φ este injectivă, cu necesitate $\varphi(1) = 1$.

Făcînd $a + b = 0$, $a = 1$, rezultă:

$$\varphi(-1) = -\varphi(1) = -1.$$

Fie $m \in N$; avem $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2\varphi(1) = 2$.

Presupunem $\varphi(m) = m$ și rezultă:

$$\varphi(m + 1) = \varphi(m) + \varphi(1) = m + 1,$$

deci:

$$\varphi(m) = m, \ (\forall) m \in N.$$

Dar $\varphi(m-m)=\varphi(m)+\varphi(-m)$ deci $\varphi(-m)=-\varphi(m)=-m$, deci $(\forall)m\in N$, avem $\varphi(-m)=-m$, adică în fond, egalitatea de mai sus este valabilă pentru orice $m\in Z$.

Dacă $n\neq 0$:

$$1=\varphi(1)=\varphi\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=\varphi(n)\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=n\varphi\left(\frac{1}{n}\right);$$

deci:

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n},\ (\forall)n\in Z \text{ și } \varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\varphi(m)\cdot\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n};$$

$$(\forall)n,\ m\in Z,\ n\neq 0.$$

Dacă $\varepsilon\in R$, $\varepsilon>0$, atunci $\varphi(\varepsilon)>0$.

În adevăr, cum $\varepsilon>0$:

$$\varphi(\varepsilon)=\varphi(\sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon})=\varphi(\sqrt{\varepsilon})\varphi(\sqrt{\varepsilon})=\varphi^2(\sqrt{\varepsilon})>0,$$

deci φ este o funcție crescătoare, căci dacă $x_1>x_2$ atunci $x_1=x_2+\varepsilon$, deci:

$$\varphi(x_1)=\varphi(x_2+\varepsilon)=\varphi(x_2)+\varphi(\varepsilon)>\varphi(x_2),\text{ cu }\varepsilon>0.$$

Fie $x_0\in R$. Se știe că pentru orice $x_0\in R$ există două șiruri de numere raționale, notate $\{p_n\}_{n\in N}$ și $\{q_n\}_{n\in N}$, astfel ca:

$$p_1\leqslant p_2\leqslant\ldots\leqslant p_n\leqslant\ldots\leqslant x_0\leqslant\ldots\leqslant q_n\leqslant\ldots\leqslant q_2\leqslant q_1 \text{ și } \lim_{n\to+\infty}p_n=\lim_{n\to+\infty}q_n=x_0.$$

Cum φ este crescătoare, din $\varphi(q)=q$, $(\forall)q\in Q$, rezultă:

$$p_1\leqslant p_2\leqslant\ldots\leqslant\varphi(x_0)\leqslant\ldots\leqslant q_2\leqslant q_1.$$

și deci $\lim_{n\to+\infty}p_n=\lim_{n\to+\infty}q_n=\varphi(x_0)=x_0$.

Deci $\varphi(x)=x$, $(\forall)x\in R$, căci x_0 a fost ales arbitrar, cu alte cuvinte singurul izomorfism al corpului real pe el însuși este aplicația identică.

Revenim la izomorfismul lui C pe el însuși. Fie $z=a+bi$, $a,\ b\in R$, i fiind unitatea imaginară.

Dar $z = z_1 + z_2 z_3$, unde $z_1 = a + 0 \cdot i$, $z_2 = b + 0 \cdot i$, $z_3 = 0 + i$. Deci:
$f(z) = f(z_1 + z_2 z_3) = f(z_1) + f(z_2 z_3) = f(z_1) + f(z_2) f(z_3) = \varphi(a) + \varphi(b) f(i) = a + bf(i)$.
și cum $f(i^2) = [f(i)]^2$ și $f(i^2) = f(-1) = \varphi(-1) = 1$ rezultă $f_1(i) = i$ și $f_2(i) = -1$.

Prin urmare există doar două izomorfisme ale corpului complex pe el însuși care invariază corpul numerelor reale, anume:

$$f_1(z) = z$$

$$f_2(z) = \bar{z}$$

unde prin $\bar{z}$ s-a notat, conform convențiilor uzuale, conjugatul numărului complex z.

XII.55[1]. Avem:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + k = \frac{ab + bc + ca + kabc}{abc} =$$

$$= \frac{[1 - (a + b + c) + ab + bc + ca - abc] + (k+1)\,abc}{abc} =$$

$$= \frac{(1 - a)(1 - b)(1 - c) + (k + 1)\,abc}{abc}.$$

Dar se știe că $\alpha + \beta + \gamma \geqslant 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ deci, făcînd $\alpha = 1 - a$, $\beta = 1 - b$, $\gamma = 1 - c$, obținem:

$$3 - a - b - c = 2 \geqslant 3\sqrt[3]{(1 - a)(1 - b)(1 - c)},$$

adică:

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leqslant \frac{8}{27}$$

și:

$$(k + 1)abc \leqslant \frac{k + 1}{27},$$

sau, în definitiv:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + k \leqslant \frac{\frac{8}{27} + \frac{k + 1}{27}}{abc} = \frac{k + 9}{27\,abc}.$$

XII.56[1]. Folosim formula de dezvoltare a binomului după *Newton* și obținem (excludem cazul banal $a = 1$):

$$(a + \sqrt{a^2 - 1})^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} \sqrt{a^2 - 1} +$$
$$+ C_n^2 a^{n-2} (\sqrt{a^2 - 1})^2 + \ldots + C_n^{n-1} a (\sqrt{a^2 - 1})^{n-1} +$$
$$+ (\sqrt{a^2 - 1})^n = a^n + C_n^2 a^{n-2} (a^2 - 1) + \ldots +$$
$$+ \sqrt{a^2 - 1} [C_n^1 a^{n-1} + C_n^3 a^{n-3} (a^2 - 1) + \ldots].$$

Notăm:

$$A_n = a^n + C_n^2 a^{n-2} (a^2 - 1) + \ldots$$
$$B_n = C_n^1 a^{n-1} + C_n^3 a^{n-3} (a^2 - 1) + \ldots$$

deci:

$$(a + \sqrt{a^2 - 1})^n = A_n + B_n \sqrt{a^2 - 1}$$

A_n și B_n fiind numere întregi.

Dar:

$$(a - \sqrt{a^2 - 1})^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} \sqrt{a^2 - 1} +$$
$$+ C_n^2 a^{n-2} (\sqrt{a^2 - 1})^2 - \ldots +$$
$$+ (-1)^{(n-1)} C_n^{n-1} a (\sqrt{a^2 - 1})^{n-1} + (-1)^n (\sqrt{a^2 - 1})^n =$$
$$= a^n + C_n^2 a^{n-2} (a^2 - 1) + \ldots - \sqrt{a^2 - 1} [C_n^1 a^{n-1} +$$
$$+ C_n^3 a^3 (a^2 - 1) + \ldots] = A_n - B_n \sqrt{a^2 - 1}.$$

Deci:

$$(a + \sqrt{a^2 - 1})^n = A_n + B_n \sqrt{a^2 - 1}$$
$$(a - \sqrt{a^2 - 1})^n = A_n - B_n \sqrt{a^2 - 1}$$

care, prin înmulțire dau:

$$1 = A_n^2 - (a^2 - 1) B_n^2,$$

deci:

$$B_n^2 = \frac{A_n^2 - 1}{a^2 - 1},$$

şi deci:

$$(a+\sqrt{a^2-1})^n = A_n + B_n\sqrt{a^2-1} =$$

$$= A_n + \sqrt{a^2-1}\sqrt{\frac{A_n^2-1}{a^2-1}} = A_n + \sqrt{A_n^2-1}.$$

XII.57[2]. Fie:

$$K = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i b_i\right) =$$

$$= p_1p_2(a_2-a_1)(b_2-b_1) + p_1p_3(a_3-a_1)(b_3-b_1) + \ldots +$$
$$+ p_1p_n(a_n-a_1)(b_n-b_1) + p_2p_3(a_3-a_2)(b_3-b_2) +$$
$$+ p_2p_4(a_4-a_2)(b_4-b_2) + \ldots + p_2p_n(a_n-a_2)(b_n-$$
$$- b_2) + \ldots + p_{n-1}p_n(a_n-a_{n-1})(b_n-b_{n-1}),$$

de unde rezultă $K \geqslant (\leqslant) 0$, după cum şirurile considerate sînt la fel sau invers ordonate.

Împărţind inegalitatea de mai sus cu $\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2$ şi trecînd scăzătorul lui K în membrul drept, obţinem inegalitatea din enunţ, respectiv inegalitatea contrară.

XII.58[3]. a°). Avem:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\},$$

$$B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) - \left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) - A = \bigcup_{i=1}^{n} (X_i - A)$$

(ultima egalitate se poate demonstra uşor, aplicînd relaţiile lui *De Morgan* şi aplicînd apoi funcţia caracteristică).

Deoarece $\bigcap_{i=1}^{n} (X_i - A) = \varnothing$, X_i echipotent cu X_j, rezultă că $X_i - A$ este echipotentă cu $X_j - A$, $(\forall)$ $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi cum B este echipotentă cu N_n rezultă că $X_i - A$ este echipotentă cu N_1, oricare ar fi $i = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Prin urmare, soluțiile sistemului sînt:

$$X_i = A \cup \{b_{\pi(i)}\},\ i = \{1, 2, \ldots, n\}$$

unde $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$ este o permutare arbitrară a grupului simetric S_n al permutărilor de n obiecte.

b°). Avem $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{nk}\}$,

$$B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) - \left(\bigcap_{i=i}^{n} X_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} X_i - A = \bigcup_{i=1}^{n} (X_i - A)$$

deci rezolvarea sistemului revine la găsirea mulțimilor:

$$X_i - A, \text{ cu } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Dar:

$$\bigcap_{i=1}^{n} (X_i - A) = \varnothing, \quad \bigcup_{i=1}^{n} (X_i - A) = B,$$

deci $X_i - A$ este echipotentă cu $X_j - A$, $(\forall) i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ deci $X_i - A$ este echipotentă cu N_k, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Considerăm mulțimea $P_k(B)$ a tuturor părților de cîte k elemente ale mulțimii B, mulțime care va avea C_{nk}^{k} elemente.

Cu ajutorul lui $P_k(B)$ formăm sistemele:

$$(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

de cîte n mulțimi $C_i \in P_k(B)$ cu proprietățile:

$$C_i \cap C_j = \varnothing,\ (\forall) i, j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ i \neq j,$$

și:

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = B.$$

Pentru fiecare sistem $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ punînd:

$$X_i - A = C_i,\ i \in \{1, 2, \ldots n\},$$

rezultă:

$$X_i = A \cup C_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

XII.59[1]. Sistemul se mai scrie:

$$\begin{cases} A^{-1}AX + A^{-1}BY = A^{-1}C \\ A_1^{-1}A_1X + A_1^{-1}B_1Y = A_1^{-1}C_1 \end{cases}$$

sau:

$$X + A^{-1}BY = A^{-1}C$$
$$X + A_1^{-1}B_1Y = A_1^{-1}\ C_1$$

adică, scăzîndu-le:

$$(A^{-1}B - A_1^{-1}\ B_1)\ Y = (A^{-1}C - A_1^{-1}\ C_1),$$

de unde, în ipoteza că $\det(B^{-1}A - B_1^{-1}A_1) \neq 0$:

$$Y = (A^{-1}B - A_1^{-1}B_1)^{-1}\ (A^{-1}C - A_1^{-1}\ C_1),$$

și analog:

$$X = (B^{-1}A - B_1^{-1}A_1)^{-1}\ (B^{-1}C - B_1^{-1}\ C_1).$$

Pentru cazul particular din enunț:

$$A^t = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix};\quad A^* = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix};\quad A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$B^t = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix};\quad B^* = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix};\quad B^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{Vmatrix};$$

$$C^t = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix};\quad C^* = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix};\quad C^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix};$$

$$A_1^t = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix};\quad A_1^* = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix};\quad A_1^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix};$$

$$B_1^t = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix};\quad B_1^* = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix};\quad B_1^{-1} = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix};$$

$$C_1^t = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}^t, \quad C_1^* = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{Vmatrix}^t, \quad C_1^{-1} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}^t$$

$$A^{-1}B = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}^t, \quad A_1^{-1}B_1 = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}^t$$

$$(A^{-1}B - A_1^{-1}B_1)^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}^t$$

$$A^{-1}C = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}^t, \quad A_1^{-1}C_1 = \begin{Vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{Vmatrix}^t$$

$$A^{-1}C - A_1^{-1}C = \begin{Vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 0 \end{Vmatrix}^t$$

$$B^{-1}A = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}^t \qquad B_1^{-1}A_1 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{Vmatrix}^t$$

$$(B^{-1}A - B_1^{-1}A_1)^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ 4 & \frac{3}{2} \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}^t$$

$$B^{-1}C = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{Vmatrix}^t \qquad B_1^{-1}C_1 = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ -7 & 1 \end{Vmatrix}^t$$

$$B^{-1}C - B_1^{-1}C_1 = \begin{Vmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{13}{2} & -1 \end{Vmatrix}^t$$

deci:

$$Y = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -3 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{Vmatrix};$$

$$X = \begin{Vmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{17}{2} & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 6 \end{Vmatrix}.$$

XII.60³. Notăm:

$$\Delta_1 = x_1 y_1 - z_1^2,$$

$$\Delta_2 = x_2 y_2 - z_2^2.$$

Avem:

$$U = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 = \Delta_1 + \Delta_2 + \\ + x_2 y_1 + x_1 y_2 - 2z_1 z_2.$$

Dar:

$$x_1 y_2 = \frac{x_1}{x_2}(x_2 y_2) = \frac{x_1}{x_2}(\Delta_2 + z_2^2)$$

și:

$$x_2 y_1 = \frac{x_2}{x_1}(x_1 y_1) = \frac{x_2}{x_1}(\Delta_1 + z_1^2)$$

deci:

$$U = \Delta_1 + \Delta_2 + \frac{x_1}{x_2}\Delta_2 + \frac{x_2}{x_1}\Delta_1 + \frac{x_1}{x_2} z_2^2 + \frac{x_2}{x_1} z_1^2 - 2z_1 z_2.$$

Însă, având în vedere condițiile date:

$$\frac{x_1}{x_2}\Delta_2 + \frac{x_2}{x_1}\Delta_1 \geqslant 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}\Delta_2 \frac{x_2}{x_1}\Delta_1} = 2\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}$$

iar:

$$\frac{x_1}{x_2}z_2^2+\frac{x_2}{x_1}z_1^2-2z_1z_2=\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\cdot z_2-\cdot\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1\right)^2$$

În aceste condiții:

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2\geqslant\Delta_1+\Delta_2+2\sqrt{\Delta_1\Delta_2}$$

sau:

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2\geqslant(\sqrt{\Delta_1}+\sqrt{\Delta_2})^2$$

sau:

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{8}{(\sqrt{\Delta_1}+\sqrt{\Delta_2})^2}=$$

$$=\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}+\sqrt{\Delta_2}}{2}\right)^2}\leqslant\frac{2}{(\sqrt[4]{\Delta_1\Delta_2})^2}=\frac{2}{\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\frac{1}{\Delta_1}+\frac{1}{\Delta_2}}=\frac{1}{\Delta_1}+\frac{1}{\Delta_2}=\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Are loc egalitate pentru:

$$x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2.$$

XII.61[2]. Considerăm polinomul de grad n în z:

$$P(z)=z^n+x_nz^{n-1}+x_{n-1}z^{n-2}+\ldots+x_2z+x_1$$

și fie $P(z)=0$.

Avem:

$$P(a_1)=a_1^n+x_na_1^{n-1}+\ldots+x_2a_1+x_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P(a_n)=a_n^n+x_n\,a_n^{n-1}+\ldots+x_2a_n+x_1$$

de unde deducem, avînd în vedere egalitățile din enunț:

$$P(a_i) = 0, \ (\forall) i \in \{1, 2..., n\}$$

deci:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum a_i = - x_n,$$
$$a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_{n-1}\ a_n = \sum a_1a_2 = x_{n-2}$$
$$\sum a_1a_2...a_i = (-1)^i\ x_{n-i+1}$$
$$.....$$
$$\sum a_1a_2...a_n = (-1)^n\ x_1,$$

de unde:

$$x_{n-i+1} = (-1)^i \sum a_1a_2...a_i,$$
$$i = \{1, 2, ..., n\}$$

XII.62[1]. Aplicăm formula de descompunere a lui *Lagrange* fracției:

$$\frac{n!}{\prod_{i=0}^{n}(x-i)}.$$

Are loc:

$$\frac{n!}{x(x-1)...(x-n)} = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + ... + \frac{A_n}{x-n}.$$

Înmulțim ambii membri ai identității cu $x - k$ și facem apoi $x = k$.

Obținem:

$$A_k = \frac{n!}{k(k-1)(k-2)...1(-1)(-2)...(k-n)} =$$
$$= (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} = (-1)^k\ C_n^k$$

deci:

$$\frac{n!}{\prod_{i=0}^{n}(x-i)} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{C_n^i}{x-i}.$$

XII.63*. Pentru demonstrație vom folosi formula lui *Cebîșev*:

$$0{,}40\,\frac{n}{\lg n} < \pi(n) < 0{,}48\,\frac{n}{\lg n};\quad n > 10 \qquad (1)$$

unde $\pi(n)$ reprezintă numărul de numere prime care nu depășesc pe n(vezi [32]) și teorema (ce aparține tot lui *Cebîșev*):

între $a > 1$ și $2a$ există cel puțin un număr prim, $a \in N$ (vezi [14]).

Potrivit acestei din urmă teoreme, dacă $a = p_n$ (p_n reprezentînd al n-lea număr prim), $n \in N^*$, între p_n și $2p_n$ există cel puțin un număr prim deci, în mod necesar, avem:

$$p_{n+1} < 2p_n, \qquad (\forall)n \in N^*.$$

Iterînd această relație, obținem:

$$p_n < 2p_{n-1} < \ldots < 2^n, \qquad (\forall)n \in N^* - \{1\}.$$

Dacă în formula (1) în loc de n punem p_n obținem:

$$0{,}40\,\frac{p_n}{\lg p_n} < \pi(p_n) = n$$

deci:

$$p_n < \frac{n \lg p_n}{0{,}40} < \frac{n \lg 2^n}{0{,}40} = \frac{n^2 \lg 2}{0{,}40} < n^2$$

adică:

$$p_n < n^2, \qquad (\forall)n \in N,\ n > 1$$

(pentru $n \in \{2, \ldots, 10\}$ se verifică prin calcul) inegalitate pe care o vom folosi mai tîrziu.

Să arătăm că dacă avem $k \in N^*$, atunci:

$$p_{n+1}^k < p_1 p_2 \ldots p_n$$

pentru orice $n \in N^*$, $n > N(k)$.

Vom proceda prin inducție. Relația lui *Sierpinski* (vezi [72]):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1$$

conduce la:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ i,j\in Z}} \frac{p_{n+i}}{p_{n+j}} = 1$$

În adevăr:

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ i,j\in Z}} \frac{p_{n+i}}{p_{n+j}} = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ i,j\in Z}} \frac{p_{n+i}}{p_{n+j}} \cdot \lim_{\substack{n\to+\infty \\ i,j\in Z}} \frac{(n+j)}{(n+i)} \cdot \lim_{\substack{n\to+\infty \\ i,j\in Z}} \frac{\ln (n+j)}{\ln (n+i)} =$$

$$= \lim_{\substack{n\to+\infty \\ i\in Z}} \frac{p_{n+i}}{(n+i)\ln (n+i)} \cdot \lim_{\substack{n\to+\infty \\ j\in Z}} \frac{(n+j)\ln (n+j)}{p_{n+j}} =$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

(aceasta deoarece:

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ i,j\in Z}} \frac{n+j}{n+i} = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ i,j\in Z}} \frac{\ln (n+j)}{\ln (n+i)} = 1).$$

Cu alte cuvinte, pentru $i = 2$, $j = 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} = 1$$

deci, transcriind acest fapt, pentru orice $\varepsilon > 0$, existi $N(\varepsilon) > 0$, $N(\varepsilon) \in N^*$, astfel că pentru orice $n > N(\varepsilon$ avem:

$$\frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} < 1 + \varepsilon$$

sau:

$$p_{n+2} < (1 + \varepsilon) p_{n+1}$$

Făcînd $\varepsilon = \frac{1}{k}$ obținem afirmația: există $N(k) \in N^*$ astfel că pentru orice $n > N(k)$ avem ($k \in N^*$):

$$p_{n+2} < \left(1 + \frac{1}{k}\right) p_{n+1}.$$

Presupunem că pentru orice $n \in N^*$ avem:

$$p_1 \cdots p_n < p_{n+1}^k$$

adică, luînd $n > k$:

$$p_1 \cdots p_{n-k} \frac{p_{n-k+1}}{p_{n+1}} \cdot \frac{p_{n-k+2}}{p_{n+1}} \cdots \frac{p_n}{p_{n+1}} < 1$$

de unde, trecînd la limită:

$$\lim_{n \to +\infty} p_1 p_2 \cdots p_{n-k} < 1,$$

absurd. Ca atare, există $n_k \in N$ astfel încît:

$$p_{n_k+1}^k < p_1 \cdots p_{n_k}.$$

Așa cum am specificat, demonstrăm relația propusă, pentru un $n \geqslant n_k$, prin inducție.

Pentru n_k se verifică. Fie inegalitatea adevărată pentru un n oarecare, $n > n_k$. Avem:

$$p_1 p_2 \cdots p_n > p_{n+1}^k$$

deci:

$$p_1 \cdots p_n p_{n+1} > p_{n+1}^k p_{n+1} > p_{n+1} \left(\frac{p_{n+2}}{1 + \frac{1}{k}}\right)^k \geqslant$$

$$\geqslant \frac{p_{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} p_{n+2}^k \geqslant p_{n+2}^k \cdot \frac{p_{n+1}}{3} \geqslant p_{n+2}^k$$

deoarece $p_{n+1} \geqslant 3$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, și:

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < 3, \qquad (\forall) k \in N^*.$$

Relația din enunț este acum banală. În adevăr, avem:

$$p_n < n^2, \ (\forall) n \in N^* - \{1\}$$

deci:

$$p_{p_n} < p_n^2$$

și:

$$p_{p_{n+1}}^k < p_{n+1}^{2k} < p_1 \cdots p_n$$

pentru orice $n \in N^*$, $n > N(2k) = N_1(k)$.

XII.64*. Începînd să acoperim de la unul din capetele dreptunghiului $ABCD$ prin dreptunghiuri cu laturile de două și respectiv o unitate, obținem următoarele situații posibile:

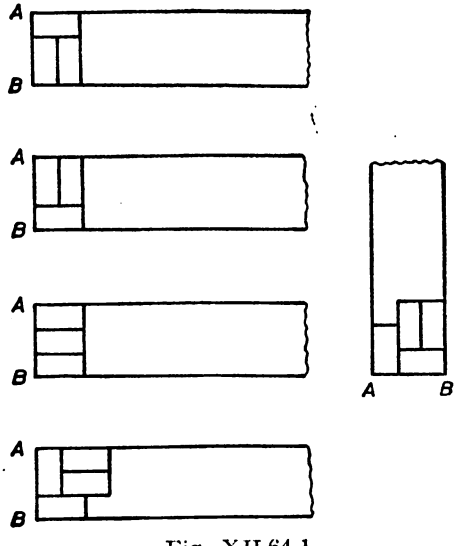


Fig. XII.64.1

De aici se deduce că:

$$I(n) = 3I(n-1) + 2j(n-1)$$

unde prin $j(n)$ am notat numărul de acoperiri prin dreptunghiuri 2×1, așa cum se arată în fig. XII.64.2, iar prin $I(n)$ numărul de acoperiri cerut.

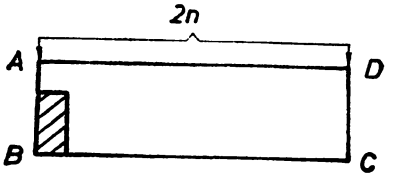


Fig. XII.64.2

Însă:

$$j(n) = I(n-1) + j(n-1)$$

deoarece această figură poate fi acoperită ca în figurile următoare:

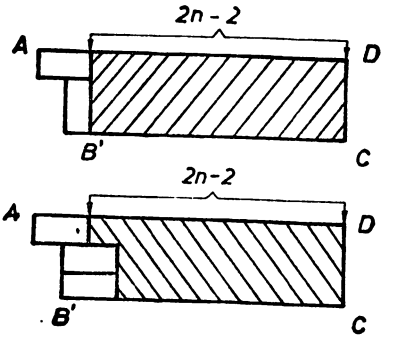


Fig. XII.64.3

Obținem deci, prin iterare:

$I(n) = 3I(n-1) + 2j(n-1) = 3I(n-1) +$
$+ 2I(n-2) + 3j(n-2) = \ldots = 3I(n-1) +$
$+ 2[I(n-2) + I(n-3) + \ldots + I(1)] + 2j(1).$

Dar $j(1) = 1$, $I(1) = 3$ după cum se vede din figura XII.64.4:

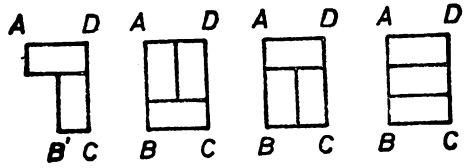


Fig. XII.64.4

deci, pentru $n \geqslant 3$ avem:

$$I(n) = 3I(n-1) + 2[I(n-2) + I(n-3) + \ldots + 3] + 2$$

și:

$$I(n+1) = 3I(n) + 2[I(n-1) + I(n-2) + \ldots + 3] + 2$$

de unde, scăzînd aceste din urmă relații:

$$I(n+1) = 3I(n) + 2I(n-1) + I(n) - 3I(n-1)$$

deci:

$$I(n+1) = 4I(n) - I(n-1),$$

adică o ecuație cu diferențe finite. Ecuația caracteristică este:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

deci:

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$$

$$\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$$

de unde:

$$I(n) = c_1 (2+\sqrt{3})^n + c_2 (2-\sqrt{3})^n$$

unde c_1 și c_2 se determină din condițiile inițiale:

$$I(1) = 3,\ I(2) = 11;$$

obținem în final:

$$I(n) = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^n].$$

XII.65*. Definim vectorii:

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}),\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Fie $M = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$.

Să introducem, pentru a da o demonstrație elegantă problemei, cîteva noțiuni de algebră.

Mulțimea $A \subset R^n = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ ori}}$ se numește *convexă* dacă pentru orice $x, y \in A$ și orice $\lambda \in [0, 1]$, vectorul:

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

aparține lui A (aici, prin x, respectiv y înțelegem n-uplele de forma:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

definind produsul unui astfel de n-uplu cu un scalar — aici un număr real — prin:

$$\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n)$$

respectiv suma:

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

dacă:

$x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, așa cum se definesc aceste operații în cazul unui spațiu vectorial).

Mulțimea $I(A)$ se numește *înfășurătoarea convexă* a mulțimii $A \subset R^n$ dacă ea coincide cu intersecția tuturor mulțimilor conexe care includ pe A.

Este clar că:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_m X_m \in I(M)$$

şi:

$$Y = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \ldots + \mu_m X_m \in I(M)$$

deci, avînd în vedere proprietăţile operaţiilor introduse anterior (operaţii în spaţiul vectorial R^n):

$$X = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_{1j}, \ \ldots, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_{nj} \right)$$

şi:

$$Y = \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j x_{1j}, \ \ldots, \sum_{j=1}^{m} \mu_j x_{nj} \right).$$

Numim *metrică* sau *distanţă* dintre două puncte:

$$X = (x_1, \ \ldots, \ x_n),$$

$$Y = (y_1, \ \ldots, \ y_n)$$

expresia:

$$d(X, \ Y) = \| X - Y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

unde funcţia $\| \ \|$ definită pe R^n cu valori în R^+, are următoarele proprietăţi:

1°). $\| X \| = 0$ dacă şi numai dacă:

$$X = (0, 0, \ \ldots, \ 0) \in R^n,$$

2°). $\| \lambda X \| = |\lambda| \ \| X \|, \ (\forall) X \in R^n, \ \lambda \in R,$

3°. $\| X + Y \| \leqslant \| X \| + \| Y \|, \ (\forall) X, \ Y \in R^n.$

Un exemplu de *normă* în R^n este cel definit anterior, anume dacă $X = (x_1, \ \ldots, \ x_n)$ atunci:

$$\| X \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Este clar că:

$$d^2(X, \ Y) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - \mu_j) x_{ij} \right]^2$$

deci inegalitatea din enunț devine:

$$d(X, Y) \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant l \leqslant m} d(X_k, X_l).$$

Vom numi *diametrul* mulțimii M, numărul:

$$D = \sup_{x, y \in M} d(x, y)$$

Se vede că:

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant l \leqslant m} d(X_k, X_l)$$

este tocmai diametrul mulțimii M.

Să arătăm că M și $I(M)$ au același diametru. Fie:

$$D = \sup_{x, y \in M} d(x, y).$$

Dar $M \subset I(M)$ deci:

$$D \leqslant \sup_{a, b \in I(M)} d(M)$$

deci $D = d(M) \leqslant d(I(M))$.

Fie:

$$I_0(M) = \bigcup_{x, y \in M} [x, y]$$

unde $[x, y] = \{z/z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ și, prin recurență:

$$I_k(M) = I_0 (I_{k-1} (M)).$$

Să arătăm că:

$$I(M) = \bigcup_{k \geqslant 0} I_k(M).$$

În adevăr, dacă $l \geqslant k$ atunci se observă că:

$$I_k(M) \subset I_l \ (M).$$

Fie $x, y \in \bigcup_{k \geqslant 0} I_k(M)$ deci $x \in I_k (M)$ și $y \in I_l(M)$.

Punem $q = \max(k, l)$ deci $x, y \in I_q(M)$; deducem de aici:

$$[x, y] \subset I_{q-1}(M) \subset \bigcup_{k \geq 0} I_k(M)$$

deci mulțimea $\bigcup_{k \geq 0} I_k(M)$ este conexă.

Deoarece $I(M)$ este mulțimea conexă minimală (în raport cu relația de incluziune) care conține pe M, rezultă $I(M) \subset \bigcup_{k \geq 0} I_k(m)$.

Să demonstrăm incluziunea în sens invers.

Fie $z \in I_0(M)$. De aici rezultă $z \in [x, y]$ cu $x, y \in M$ deci:

$$z = \lambda x + (1 - \lambda) y$$

unde $\lambda \in [0, 1]$. Presupunem:

$$I_k(M) \subset I(M)$$

și să arătăm că:

$$I_{k+1}(M) \subset I(M).$$

Dacă $z \in I_{k+1}(M)$ rezultă $z \in [x, y]$, în care:

$$x, y \in I_k(M)$$

Deoarece:

$$I_k(M) \subset I(M)$$

rezultă $x, y \in I(M)$ și cum $I(M)$ este conexă, rezultă $z \in I(M)$. Deci $I_{k+1}(M) \subset I(M)$.

În concluzie, am demonstrat că pentru orice $k \in N$:

$$I_k(M) \subset I(M)$$

deci:

$$\bigcup_{k \geq 0} I_k(M) \subset I(M).$$

Din incluziunile stabilite, rezultă în definitiv:

$$I(M) = \bigcup_{k \geq 0} I_k(M).$$

De aici, dacă $a, b \in I(M)$ atunci $a, b \in I_k(M)$.

Să arătăm că dacă D_k este diametrul mulțimii $I_k(M)$, $k \in N$, D diametrul mulțimii M, atunci:

$$D = D_0 = D_1 = \ldots = D_k = \ldots$$

În adevăr, este suficient să demonstrăm că $D = D_0$ căci pentru $D_k = D_{k+1}$, $k \geqslant 1$, demonstrația este analoagă deoarece între $I_k(M)$ și $I_{k+1}(M)$ avem aceeași relație de recurență ca între M și $I_0(M)$ și anume:

$$I_{k+1}(M) = I_0(I_k(M)).$$

Să observăm că:

$$M \subset I_0(M)$$

deci $D \leqslant D_0$.

Fie $A, B \in I_0(M)$. Dacă $A = [X_1, Y_1]$ unde $X_1, Y_1 \in M$ atunci și $B \in [X_2, Y_2]$ unde, de asemenea, $X_2, Y_2 \in M$. Pentru a demonstra ceea ce ne-am propus este suficient să arătăm că:

$$\| A - B \| \leqslant \max (\| X_1 - X_2 \|, \| Y_1 - Y_2 \|, \| X_1 - Y_2 \|, \| X_2 - Y_1 \|)$$

deoarece de aici va rezulta:

$$d(A, B) \leqslant D$$

deci:

$$\sup_{A,B \in I_0(M)} d(A, B) \leqslant D$$

și deci $D_0 \leqslant D$ de unde, cu $D \leqslant D_0$, se obține $D = D_0$.

Să arătăm că:

$$\| A - B \| \leqslant \max \{\| A - X_2 \|, \| A - Y_2 \|\}.$$

Deoarece $B \in [X_2, Y_2]$ rezultă:

$$B = \lambda X_2 + (1 - \lambda) Y_2, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Fie:

$$A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

$$X_2 = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$Y_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

În felul acesta, inegalitatea de mai sus devine:

$$[\alpha_1 - \lambda x_1 - (1 - \lambda)y_1]^2 + \ldots + [\alpha_n - \lambda x_n - (1 - \lambda)y_n]^2 \leqslant \max\left\{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - x_i)^2, \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - y_i)^2\right\}.$$

Membrul stîng, considerat ca o funcție de gradul al doilea în λ, cu coeficientul lui λ^2 egal cu:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \geqslant 0$$

își atinge maximul în una din extremitățile intervalului [0, 1] astfel că inegalitatea:

$$\|A - B\| \leqslant \max \|A - X_2\|, \|A - Y_2\|$$

este demonstrată.

Să presupunem, de exemplu, că $\|A - X_2\|$ este maximă. La fel se demonstrează că:

$$\|A - X_2\| \leqslant \max \{\|X_1 - X_2\|, \|X_2 - Y_1\|\}$$

deci, în definitiv:

$$\|A - B\| \leqslant \max \{\|X_1 - X_2\|, \|Y_1 - Y_2\|, \|X_1 - Y_2\|, \|X_2 - Y_1\|\}.$$

Deci, în final:

$$D = D_0 = \ldots = D_k = \ldots$$

Revenind de la punctul de la care am plecat, rezultă că:

$$d(a,\ b) \leqslant D_0 = D$$

astfel că:

$$\sup_{a,\ b \in I_0(M)} d(a,\ b) \leqslant D.$$

În definitiv:

$$d(I(M)) = D \text{ (diametrul lui } M).$$

Aşadar, deoarece $X,\ Y \in I(M)$, rezultă:

$$d(X,\ Y) \leqslant d(I(M)) = d(M) = \max_{1 \leqslant k \leqslant l \leqslant m} d(X_k,\ X_l)$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

XII.66*. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sînt afectate de o relaţie de ordine, de exemplu:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n.$$

Notînd:

$$\frac{1}{n}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) = m$$

suma se scrie:

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{n+1}{n} \lambda_j - m \right|$$

Este clar că dacă:

$$\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \frac{mn}{n+1} \leqslant \lambda_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$$

atunci:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{n+1}{n}\lambda_j - m\right| = km - \frac{n+1}{n}(\lambda_1 + + \ldots + \lambda_k) +$$

$$+\frac{n+1}{n}(\lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_n) - (n-k)m =$$

$$= -\frac{n+1}{n}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) + \frac{n+1}{n}(\lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_n) -$$

$$-\frac{n-2k}{n}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k + \lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_n) = -$$

$$-\frac{2n-2k+1}{n}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) + \frac{2k+1}{n}(\lambda_{k+1} +$$

$$+ \ldots + \lambda_n) \leqslant \frac{(2n-2k+1)k + (2k+1)(n-k)}{n} =$$

$$= -\frac{4}{n}k^2 + 4k + 1,$$

cu egalitate pentru:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = -1, \quad \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 1.$$

Dar:

$$-\frac{4}{n}k^2 + 4k + 1 \leqslant n + 1 - \frac{\left(n - 2\left[\frac{n}{2}\right]_*\right)^2}{n}$$

cu egalitate cînd:

$$k = \left[\frac{n}{2}\right]_*$$

sau:

$$k = \left[\frac{n+1}{2}\right]_*.$$

În concluzie, maximul expresiei date este egal cu:

$$n+1-\frac{\left(n-2\left[\frac{n}{2}\right]_*\right)^2}{n}.$$

XII.67*. Aplicînd inegalitatea lui *Jensen* (vezi III.P.170) pentru funcția concavă ln, obținem:

$$\ln\frac{\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\geqslant\frac{\lambda_1\ln x_1+\ldots+\lambda_n\ln x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$$

sau:

$$\ln\left(\frac{\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\geqslant$$

$$\geqslant\ln x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}$$

adică tocmai inegalitatea generalizată a mediilor.

XII.68*. Cu 10 numere se pot forma:

$$C_{10}^1+C_{10}^2+\ldots+C_{10}^{10}=2^{10}-1=1023$$

grupe distincte. Întrucît se cere ca grupul fără nici un element să nu fie considerat, este necesar ca nici grupul care conține toate cele 10 numere să nu fie considerat deci în total va trebui să considerăm 1022 grupe. Întrucît numerele sînt de două cifre, sumele numerelor din grupele formate sînt oricum mai mari sau egale cu 10 și mai mici sau egale cu:

$$99+98+\ldots+91=855.$$

Cum există 1022 grupe avînd sumele mărginite de 10 și 855, există în mod necesar grupe cu sume egale (principiul lui *Dirichlet*) căci, altfel, presupunînd că sumele sînt distincte, ar trebui să existe grupe cu sume mai mari ca 855. Cum grupele sînt distincte, dacă nu sînt disjuncte se scot părțile lor comune și se obțin grupe de tipul cerut.

XII.69*. Din condițiile problemei rezultă că există un k, $0 \leqslant k \leqslant 1$, și un x_ε cu proprietățile:

$$|f(x)| \leqslant k, \ (\forall) x \in R$$

$$|f(x_\varepsilon)| \geqslant k - \varepsilon, \ (\forall)\varepsilon, \ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant k.$$

Considerăm un $t \in R_0^+$ satisfăcînd relația:

$$tk - 1 > 0.$$

Scriem ecuația dată pentru $x = x_\varepsilon$ și y arbitrar:

$$f(x_\varepsilon + y) + f(x_\varepsilon - y) = 2f(x_\varepsilon)g(y)$$

care dă:

$$2k \geqslant |f(x_\varepsilon + y)| + |f(x_\varepsilon - y)| \geqslant |f(x_\varepsilon + y) + f(x_\varepsilon - y)| = 2|f(x_\varepsilon)||g(y)|$$

deci:

$$|g(y)| \leqslant \frac{k}{|f(x_\varepsilon)|} < \frac{k}{k - \varepsilon} < 1 + t\varepsilon,$$

dacă $\varepsilon < \dfrac{tk - 1}{t}$. Presupunem acum că există y_0 astfel încît $|g(y_0)| > 1$. Luînd

$$\varepsilon < \frac{|g(y_0)| - 1}{t}$$

avem:

$$|g(y_0)| < 1 + t\frac{|g(y_0)| - 1}{t} = |g(y_0)|,$$

absurd, deci $g(y) \leqslant 1$, $(\forall)$ y.

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

[1]. ARAMĂ, L., MORUZAN, T., *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, Edit. tehnică, București, 1967.

[2]. BANEA, H., *Probleme de matematică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1976.

[3]. BOGDAN, I.R., MILCOVEANU, A., *Logica pe înțelesul tuturor*, Edit. enciclopedică română, București, 1974.

[4]. BUICLIU, G., *Probleme de constructii geometrice cu rigla și compasul*, Edit. tehnică, București, 1957.

[5]. CĂLUGĂRIȚA, G., ȘTEFĂNESCU, V., *Culegere de probleme de matematică*, Universitatea populară, București, 1972.

[6]. CHIȚEI, G.A., *Metode pentru rezolvarea problemelor de geometrie*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1969.

[7]. CIUCU, G., CRAIU, V., SĂCUIU, I., *Probleme de teoria probabilităților*, Edit. tehnică, București, 1974.

[8]. CORDUNEANU, A., RADU, G., POP, I., GRĂMADĂ, V., *Culegere de probleme de matematică*, Edit. Junimea, Iași, 1972.

[9]. COȘNIȚĂ, C. și COLAB., *Culegere de probleme de geometrie analitică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1963.

[10]. COȘNIȚĂ, C., TURTOIU, F., *Culegere de probleme de matematică*, Edit. tehnică, București, 1968.

[11]. COȘNIȚĂ, C., TURTOIU, F., *Culegere de probleme de algebră*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1972.

[12]. COSTINESCU, O., AMIHĂESEI, C., BÎRSAN, T., *Topologie generală, probleme*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1974.

[13]. CRAIU, M., ROȘCULEȚ, M., *Culegere de probleme de analiză matematică*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

[14]. CREANGĂ, I., CAZACU, C., MINUȚ, P., OPAIȚ, G., REISCHER, C., *Introducere în teoria numerelor*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.

[15]. CRIȘAN, I., LARE, A., *Culegere de probleme de geometrie analitică*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.

[16]. CUCUREZEANU, I., *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1976.

[17]. DEMIDOVITCH, B., *Recueil d'exercices et de problemes d'analyse mathématique*, Edit. Mir, Moscova, 1972.

[18]. DOROFEEV, G., POTAPOV, N., ROZOV, N., *Elementary Mathematics*, Edit. Mir, Moscova, 1973.

[19]. DRAGOMIR, P., DRAGOMIR, A., *Structuri algebrice*, Edit. Facla, Timişoara, 1975.

[20]. DRĂGHICESCU, D. ŞI COLAB., *Ghid de pregătire la matematică*, Edit. Scrisul românesc, Craiova, 1976.

[21]. EFIMOV, N.V., *Kratkii kurs analiticeskoi gheometrii*, Edit. Nauka, Moscova, 1975.

[22]. FADEEV, D., SOMINSKY, I., *Problems in higher algebra*, Edit. Mir, Moscova, 1968.

[23]. FAURE, R., KAUFMANN, A., DENIS-PAPIN, M., *Îndreptar de matematică modernă*, Edit. ştiinţifică, Bucureşti, 1969.

[24]. FREUDENTHAL, H., *Limbajul logicii matematice*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1973.

[25]. GEORGESCU-BUZĂU, E., MATEI, N., *Exerciții de teoria mulțimilor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1969.

[26]. GEORGESCU-BUZĂU, E., MATEI, N., DRĂGHICESCU, I., *Probleme actuale de matematică în liceu*, Edit. Albatros, București, 1975.

[27]. GHELFOND, A.O., *Calculul cu diferențe finite*, Edit. tehnică, București, 1956.

[28]. GHIUNTER, N.M., CUZMIN, R.O., *Culegere de probleme de matematici superioare*, Edit. tehnică, București, 1953.

[29]. HADAMARD, J., *Lecții de geometrie elementară — geometrie plană*, Edit. tehnică, București, 1960.

[30]. HARDY, G.H., WRIGHT, E.M., *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, Oxford, 1945.

[31]. HUSCHITT, M., IOANOVICIU, A., MIHĂILEANU, N., NEUMAN, M., STANCIU, L., STANCIU, P., VIȘA, E., *Culegere de probleme de geometrie sintetică și proiectivă*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.

[32]. IAGLOM, I.M., IAGLOM, A.M., *Probleme neelementare tratate elementar*, Edit. tehnică, București, 1962.

[33]. INGHAM, A.E., *The distribution of prime numbers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[34]. ION, I., NIȚĂ, C., RADU, N., POPESCU, D., *Culegere de probleme de algebră*, Centrul de multiplicare al Universității din București, 1975.

[35]. ION, I., RADU, N., *Algebra*, Ed. a II-a, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.

[36]. IONESCU, B., BRIȘCĂ, V., TUDOR, G., *Calcul numeric*, Editura didactică și pedagogică, București, 1974.

[37]. IONESCU, B., RADU, D., ILIESCU, I., *Probleme de matematică pentru admiterea în învățământul superior*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1976.

[38]. IONESCU-ŢIU, C., PÎRŞAN, L., *Algebra şi analiza matematică pentru admitere în facultate*, Edit. Albatros, Bucureşti, 1974.

[39]. IONESCU-ŢIU, C., PÎRŞAN, L., *Calcul diferenţial şi integral pentru admitere în facultate*, Edit. Albatros, Bucureşti, 1975.

[40]. IONESCU-ŢIU, C., PÎRŞAN, L., MIHĂILEANU, N., ROGAI, E., *Probleme de matematică*, Ed. a II-a, Edit. tehnică, Bucureşti, 1973.

[41]. KAUFMANN, A., PRÉCIGOUT, M., *Elemente de teoria mulţimilor şi algebră modernă*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1973.

[42]. KOCETKOV, E.S., KOCETKOVA, E.S., *Algebra i elementarnîie funcţii*, Edit. Prosveţenie, Moscova, 1974.

[43]. KRASNOV, M.L., MAKARENKO, G.I., *Problems and exercices in the calculus of variations*, Edit. Mir, Moscova, 1975.

[44]. KUROSH, A., *Teoria grupurilor*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1959.

[45]. KUROSH, A., *Higher algebra*, Edit. Mir, Moscova, 1975.

[46]. LASCU, A., *Exerciţii de algebră*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1967.

[47]. LAVROV, I.A., MAXIMOV, L.L., *Probleme de logică*, Centrul de multiplicare al Universităţii din Bucureşti, 1973.

[48]. LEONTE, A., TRANDAFIR, R., *Clasic şi actual în calculul probabilităţilor*, Edit. Dacia, Cluj, 1974.

[49]. MANGU, V., *Ce este un număr prim?* În: „Revista 514" a Liceului „N. Bălcescu", Nr. 3, Bucureşti, 1974, pp. 10—17.

[50]. MANGU, V., *Asupra celui de-al n-lea număr prim* În: „Gazeta Matematică seria A" nr. 3, Bucureşti, 1974.

[51]. MIHĂILEANU, N., *Istoria matematicii*, Edit. enciclopedică română, Bucureşti, 1974.

[52]. MIHĂILEANU, N., *Complemente de geometrie sintetică*. Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1969.

[53]. MIHU, C., *Aplicații ale matematicii în practică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.

[54]. MINORSKI, P.V., *Problems in higher mathematics*, Edit, Mir, Moscova, 1975.

[55]. MIRON, R., *Geometrie elementară*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1968.

[56]. MOISIL, G., *Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor*, Edit. științifică, București, 1968.

[57]. NĂSTĂSESCU, C., *Introducere în teoria mulțimilor*, Centrul de multiplicare al Universității din București, 1975.

[58]. NEGOESCU, N.C., *Probleme cu...probleme*, Edit. Facla Timișoara, 1975.

[59]. NICOLESCU, M., DINCULEANU, N., MARCUS, S., *Analiză matematică*, Ed. a III-a, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.

[60]. NIȚĂ, C., SPIRCU, T., *Probleme de structuri algebrice*, Edit. tehnică, București, 1974.

[61]. PERJU, C., PERJU, R., *Probleme de matematică pentru admitere în învățământul superior*, Edit. militară, București, 1974.

[62]. PETRICĂ, I., RUSU, I., *Probleme de matematică pentru treapta I de liceu*, Edit.Albatros, București, 1976.

[63]. POPA, C., ȘI COLAB., *Introducere în analiza matematică*, Edit. Facla, Timișoara, 1976.

[64]. POPOVICI, C., *Teoria numerelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1973.

[65]. POSTELNICU, V.T., *Culegere de probleme de geometrie analitică și diferențială*, Edit. tehnică, București, 1970.

[66]. REISCHER, C., SÂMBOAN, A., *Culegere de probleme de teoria probabilităților și statistică matematică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1972.

[67]. ROMAN, T. ȘI COLAB., *Probleme date la concursurile de matematică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1970.

[68]. ROȘCULEȚ N.M., POPESCU, I.O., *Probleme de analiză matematică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.

[69]. RUSU, E., *Aritmetica și teoria numerelor*, Edit. tehnică, București, 1964.

[70]. RUSU, E., *Vectori*, Edit. Albatros, București, 1976.

[71]. SCHINZEL, A., *Sur une propriété du nombre de diviseurs*, În: „Publ. Math.", tom. 3, fasc. 3—4, Debrecen, 1954, pp. 261—262.

[72]. SIERPINSKI, W., *Ce știm și ce nu știm despre numere prime*, Edit. științifică, București, 1966.

[73]. SIERPINSKI, W., *Sur les ensembles de points aux distances rationelles situés sur un cercle*, În: „Elem. Math." 1959, pp. 25—27.

[74]. SIMA, D.P. ,ATANASIU, I.G., *Culegere de probleme de trigonometrie*, Edit. tehnică, București, 1970.

[75]. SIMIONESCU, G., ȘTEFĂNESCU, V., *Aplicații ale calculului vectorial în geometrie și trigonometrie*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.

[76]. SIREȚCHI, GH. *Exercitii de analiză matematică*, ed. a III-a, Centrul de multiplicare al Universității din București, 1976.

[77]. SMIRNOV, V.I., *Curs de matematici superioare*, Edit. tehnică, București, 1965.

[78]. SMOLEANSCHI, M., *Tabele de integrale nedefinite*, Edit. tehnică, București, 1972.

[79]. SPERANZA, F., *Relații și structuri*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1975.

[80]. STAMATE, I., CRIȘAN, I., *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică pentru licee*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1969.

[81]. STAMATE, I., *Culegere de probleme de matematici superioare*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.

[82]. STĂNESCU, I., *Mulțimi de numere*, Edit. Albatros, București, 1975.

[83]. TEODORESCU, I.D., TEODORESCU, S.D., *Culegere de probleme de geometrie superioară*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.

[84]. TOMESCU, I., *Introducere în combinatorică*, Edit. tehnică, București, 1972.

[85]. TOMESCU, I., *Grafuri și programare liniară*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.

[86]. TRANDAFIR, R., LEONTE, A., *Culegere de probleme și exerciții de matematică*, Edit. Junimea, Iași, 1975.

[87]. TURBATU, S., *Calcul diferențial și integral*, Centrul de multiplicare al Universității din București, 1975.

[88]. ȚIȚEICA, G., *Culegere de probleme de geometrie*, Edit. tehnică, București, 1975.

[89]. VEKLEMIȘEV, D.V., *Kurs analiticeskoi gheometrii i lineinoi alghebrî*, Edit. Nauka, Moscova, 1974.

[90]. VINOGRADOV, I.M., *Osnovî teorii cisel*, Gosudarstennoe izdaltestvo tehnico-teoreticeskoi literaturî, Moscova, 1952.

[91]. VRÂNCEANU, G., *Curs de geometrie analitică și proiectivă*, București, 1945.

[92]. ZANȚEV, I.L., *Elementî vîșșei matematiki*, Edit. Nauka, Moscova, 1974.

[93]. * * * *Probleme de matematică pentru concurs* (trad. din lb. maghiară), Edit. didactică și pedagogică, București, 1972.

[94]. * * * Colecția Gazetei matematice seria B (G.M.B), 1965—1974.

[95]. * * * Colecția Gazetei matematice seria A (G.M.A), 1965—1974.

ÎN ATENȚIA CITITORILOR[1]

la volumul I:

pag.

25, r. 16, se va citi: $** \ldots * \overset{\text{def.}}{=} *(*(*\ldots(*)))$;
32, r.7, se va citi: tiv, nu...
74, r.20, se va citi: *Exemple*
78, r.12, se va citi: Atunci, formal, elementul...
80, r.33, se va citi: Funcția $f:R \to R - \{0\}$ ...
80, r.35, se va citi ... grupului $(R, +)$ în unitatea
82, r.11, se va citi: **II.7.4.** Inelul $(C, +, .)$ este cîmp .
240, r.18, se va citi: $D = 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$.
257, r.11, se va citi: Pentru $m=n=p$ obținem în ...
263, r.3, se va citi: $i=1, \ldots, n$.
263, r.21, se va citi: $n+1 < n+2 < n+3 < \ldots < n^2 - 1$,
301, r.26, se va citi: ... și $a_2b_1 + a_1b_2$ sînt numere în—
313, r.7, se va citi: *(Matematika v şkole, 1965)*
313, r.21, se va omite cuvîntul: reale
332, r.26, se va citi: $+ \cos [\varphi + (n-1)\alpha]$.
389, r.4, se va citi: $u+v+t=0$
398, fig. V.2.1.3, în loc de A' se va citi D.
464, r.23, semnul $\leqslant$ se va înlocui cu semnul $\geqslant$
466, r.6, se va citi: **VI.26**[1]. Sînt disponibile...
475, r.6, se va citi: ...N^*.
482, r.2, se va citi: DBC, ABC (tetraedrul...
513, r.12, se va citi: are un număr de m ...
522, r.15, se va citi... (1), $g(x-n) = +\infty$.
563, r.17, se va citi: Din măs $\overset{\frown}{AB}$ = măs $\overset{\frown}{CD}$ = .
577, r. 4, se va citi: ... $y = (\sqrt{2} + 1)^{\sin x}$.
577, r.18, se va citi: poate fi ...
579, r.11, se va citi: să nu acopere ...
620, r.1, se va citi: **VI.114***. ...
653, r.15, se va citi: $np = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$,
660, r.21, se va citi: b°). Șirul $\{a_n\}_{n \in N}$ ...

Graficele III. 11.0.6 (p. 129) și III. 11.0.10 (p. 130) se vor modifica în așa fel încît punctul în care $x_1 = x_2 = x_3$ să fie punct de inflexiune.

[1] Punctele de suspensie arată continuarea de rînd; în calculul numărului de ordine al rîndului în pagină, o formulă (cu fracții sau indici-superiori, inferiori) a fost considerată ca formînd un singur rînd.

CUPRINS

Capitolul VII ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

VII.1.0. Matrice. Operații cu matrice 5
VII.2.0. Determinanți 9
VII.3.0. Sisteme de ecuații (gradul I) 16
Probleme rezolvate (V.II.R.1—VII.R.16) .. 21
Teste (VII.T.1—VII.T.16) 32
Răspunsuri (VII.T.1—VII.T.16) 35
Probleme propuse (VII.P.1—VII.P.33) 36
Indicații (VII.P.1—VII.P.33) 41
Soluții (VII.P.1—VII.P.33) 44

VII.4.0. Polinoame 61
Probleme rezolvate (VII.R.17—VII.R.27) .. 70
Teste (VII.T.17—VII.T.27) 80
Răspunsuri (VII.T.17—VII.T.27) 82
Probleme propuse (VII.P.34—VII.P.73) .. 83
Indicații (VII.P.34—VII.P.62) 90
Soluții (VII.P.34—VII.P.73) 91

Capitolul VIII ANALIZĂ MATEMATICĂ

VIII.1.0. Definiții și propoziții 110
Teste (VII.T.1—VII.T.22) 119
Răspunsuri (VIII.T.1—VIII.T.22) 123
Probleme propuse (VIII.P.1—VIII.P.61) .. 125
Indicații (VII.P.1—VIII.P.46) 136
Soluții (VII.P.1—VIII.P.61) 137

Capitolul IX GEOMETRIE ANALITICĂ

IX.1.0. Definiții și propoziții 188
IX.2.0. Ecuația unei drepte 190

IX.3.0. Conice 193
IX.4.0. Probleme de tangență 194
IX.5.0. Proprietăți locale ale conicelor 195
IX.6.0. Locuri geometrice 195
Probleme rezolvate (IX.R.1—IX.R.14) .. 201
Teste (IX.T.1—IX.T.20) 219
Răspunsuri (IX.T.1—IX.T.20) 222
Probleme propuse (IX.P.1—IX.P.35) 223
Indicații (IX.P.1—IX.P.35) 229
Soluții (IX.P.1—IX.P.35) 232

Capitolul X ARITMETICA ȘI TEORIA NUMERELOR

X.0.0. Definiții. Notații. Preliminarii 254
Probleme rezolvate (X.O.R.1—X.O.R.24) .. 266
Teste (X.O.T.1—X.O.T.7) 281
Răspunsuri (X.O.T.1—X.O.T.7) 282
Probleme propuse (X.O.P.1—X.O.P.11) .. 283
Soluții (X.O.P.1—X.O.P.11) 284
X.1.0. Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi 288
Teste (X.1.T.1—X.1.T.4) 296
Răspunsuri (X.1.T.1—X.1.T.4) 297
Probleme propuse (X.1.P.1—X.1.P.28) 298
Soluții (X.1.P.1—X.1.P.28) 300
X.2.0. Divizibilitatea numerelor 322
Probleme rezolvate (X.2.R.1—X.2.R.6) 334
Teste (X.2.T.1—X.2.T.6) 337
Răspunsuri (X.2.T.1—X.2.T.6) 338
Probleme propuse (X.2.P.1—X.2.P.10) .. 341
Soluții (X.2.P.1—X.2.P.10) 342
Probleme alese (X.P.1—X.P.45) 347
Soluții (X.P.1—X.P.45) 354

Capitolul XI PROBABILITĂȚI

XI.1.0. Definiții și propoziții 400
XI.2.0. Probabilități condiționate 402
XI.3.0. Evenimente independente 404
XI.4.0. Formule 406
XI.5.0. Scheme clasice de probabilitate 408
Probleme rezolvate (XI.R.1—XI.R.8) 410
Probleme propuse (XI.P.1—XI.P.9) 419

Indicații (XI.P.1—XI.P.7) 421
Soluții (XI.P.1—XI.P.9) 421

Capitolul XII PROBLEME FINALE

Probleme de sinteză (XII.1—XII.36) 438
Indicații (XII.3—XII.36) 444
Soluții (XII.3—XII.36) 446
Probleme alese (XII.37—XII.69) 477
Indicații (XII.38—XII.61) 485
Soluții (XII.37—XII.69) 485
BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ 541
ÎN ATENȚIA CITITORILOR 548

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar iunie 1977. Apărut 1977. Comanda 1161. Tiraj 120 000 + 90 exemplare broșate. Coli de tipar 17,25.

Comanda nr. 70 078
Tiparul executat la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii",
Piața Scînteii nr. 1, București,
Republica Socialistă România